МПГ
У

СЛУ

Теорема Крамера

Метод обратной матрицы

Если решение системы единственное, то система линейных уравнений называется определенной. В случае, когда решение совместной системы не единственный, систему уравнений называют неопределенной.

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными (или равносильными), если все решения одной системы является решениями второй, и наоборот. Эквивалентные (или равносильные) системы получаем с помощью эквивалентных преобразований.

ТЕОРЕМА КРАМЕРА

- Если главный определитель системы линейных алгебраических уравнений Δ отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}.$$

- Если Δ=0 … из определителей Δj отличен от нуля, то СЛАУ решений не имеет.
- Если Δ=0 и все Δj= 0 (j=1,…,N), то СЛАУ имеет бесконечное множество решений.

Формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}.$$

- где $\Delta j=0$ ($j=1,\ldots,n$) - определители, образованные из главного определителя СЛУ Δ заменой j-го столбца столбцом из свободных членов

Однородные системы ЛУ (ОСЛУ)

- Система уравнений с нулевыми свободными членами называется однородной, в противном случае – неоднородной. • Рассмотрим однородную систему из n линейных уравнений с n неизвестными •

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

доказать

Ясно, что в этом случае все Δj= 0 (j=1,…,N), , так как все элементы одного из столбцов в этих определителях равны нулю.

Поэтому нулевое решение всегда является решением такой системы. Нулевое решение называется тривиальным решением.

- Так как неизвестные находятся по формулам Крамера , то в случае, когда $\Delta \neq 0$, система имеет единственное нулевое решение $x = y = z = 0$.
- Однако, во многих задачах интересен вопрос о том, имеет ли однородная система решения, отличные от нулевого)

нетривиальное

Критерий существования нетривиального решения однородной системы (ОСЛУ)

Теорема. Для того, чтобы однородная квадратная система линейных уравнений имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю $\Delta = 0$.

- Итак, если определитель $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение , а значит x=y=z=0.

Если же $\Delta = 0$, то система линейных однородных уравнений имеет бесконечное множество решений.

Пример 1

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x + 2y + z = 0, \\ 4x + 11y - z = 0. \end{cases}$$

Пример 1 $\begin{cases} x+3y-z=0, \\ 2x+2y+z=0, \\ 4x+11y-z=0. \end{cases}$

Раскладываем определитель по 1 строке

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -13+18-14=-9 \neq 0$$

Определитель системы не равен нулю, значит ОСЛУ имеет единственное тривиальное решение x=y=z=0.

Пример 2

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ 5x - y + 4z = 0. \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ 5x - y + 4z = 0. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Бесконечное множество решений

Пример 2

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ 5x - y + 4z = 0. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ & -6 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Ставим 2 строку на место 1-ой, умножаем ее на (-2) и складываем со 2-ой. Умножаем 1 строку на (-5) и складываем с 3-ей.

Пример 2

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ 5x - y + 4z = 0. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ & -6 & -6 & 0 \end{array}\right). \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Ставим 2 строку на место 1-ой, умножаем ее на (-2) и складываем со 2-ой. Умножаем 1 строку на (-5) и складываем с 3-ей.

Пример

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ 5x - y + 4z = 0. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ & -6 & -6 & 0 \end{array}\right). \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ y + z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -z, \\ y = -z, \\ z \in R. \end{cases}$$

Решение систем линейных уравнений

матричным методом или методом обратной матрицы

Обратная матрица

- Пусть ***A*** — квадратная матрица порядка ***nxn***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если существует квадратная матрица **X** той же размерности, что и матрица **A**, удовлетворяющая соотношениям **A·X = X·A=E,** то матрица **A** называется обратимой, а матрица **X** называется обратной к матрице **A** и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$.

где **E**— единичная матрица соответствующей размерности:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, X\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \Rightarrow X = A^{-1}.$$

Невырожденная матрица — квадратная матрица — квадратная матрица, определитель — квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. В противном случае она называется вырожденной.

Для квадратной матрицы невырожденность эквивалентна каждому из следующих условий:

- Матрица обратима, то есть существует обратная матрица;
- строки (столбцы) матрицы линейно независимы;
- элементарными преобразованиямиэлементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицу можно привести к единичной

- Всякая невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу.

$\mathbf{A}_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $\mathbf{a}_{ij}$ матрицы $\mathbf{A}$.

Для того, чтобы матрица $\mathbf{A}$ была обратима, необходимо и достаточно, чтобы $\det \mathbf{A} \neq 0$. Обратная матрица единственна.

Свойства обратной матрицы (справедливы для любых невырожденных матриц):

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$$

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

$$E^{-1} = E;$$

$$A \cdot A^{-1} \cdot A = A;$$

- матрица, обратная к диагональной матрице — диагональная матрица;
- матрица, обратная к треугольной матрице — треугольная матрица;
- матрица, обратная к симметричной матрице — симметричная матрица.

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

Эту систему можно представить в матричном виде: **AX = b**, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- матрица коэффициентов системы уравнений;

- Индексы коэффициентов a_{ij} системы обозначают номера уравнения (i) и неизвестного (j), при котором стоит этот коэффициент.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- вектор неизвестных, -

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- вектор правых частей

$$A \cdot X = b$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot b$$

$$X = A^{-1} \cdot b$$

= МУМНОЖ(МОБР(A);b)

- Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система несовместна.
- Если матрица A является квадратной и имеет обратную матрицу, то система уравнений имеет единственное решение

$$x = A^{-1}b\,.$$

Порядок операций при вычислении обратной матрицы:

1. Вычисляем определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$: $\Delta = \det A \neq 0$;

2. Заменяем каждый элемент матрицыего алгебраическим дополнением: $\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nj} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

3. Транспонируем полученную матрицу: $\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & \dots & A_{ji} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

4. Находим обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & \dots & A_{ji} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Матрица, обратная к диагональной матрице — диагональная матрица.

Пример –доказать

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \; a \neq 0, b \neq 0, \; c \neq 0,$$

$$\det A = abc, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная к треугольной матрице — треугольная матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

определитель C Δ **= 10**

обратная к C

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,4 \\ 0 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

◆**Пример.** Решить систему уравнений матричным способом $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$

Найдем сначала обратную матрицу системы

$A_{11}=(-1)^{1+1}4=4;$ $A_{12}=(-1)^{1+2}3=-3;$

$A_{21}=(-1)^{2+1}(-1)=1;$ $A_{22}=(-1)^{2+2}2=2;$

$$\Delta= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \quad A^{-1}= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

По формуле (1.20) напишем решение $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}$

Выполним умножение матриц, получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4\cdot 1+1\cdot 18 \\ -3\cdot 1+2\cdot 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 22 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22/11 \\ 33/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Таким образом $x=2$, $y=3$.

Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2 = 4 \\ x_1+x_2 = 2 \end{cases}$$

Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 22 \\ x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

Задачи для самопроверки.

Решите матричным способом:

А) $\begin{cases} 2x - y - 3z = -15 \\ 3x + 2y + z = 8 \\ -4x + y + 2z = 14 \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 4x + 2y - 6z = 10 \\ y - 2z = 1 \\ 3x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$

В) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$

Г) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 38 \\ 5x + y - z = 8 \\ -4x + 3y - 4z = -38 \end{cases}$