Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 15.

Тема: Случайные величины и их числовые характеристики.

Цель: Ознакомиться с понятиями дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины.

- Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

- Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечно, либо бесконечно, но обязательно счетно.

- Непрерывной случайной величиной называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.

- Случайные величины: $X, Y, Z, ...;$

- значения: $x, y, z, ...\,.$

- Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

- Закон распределения случайной величины можно задать, как и функцию: табличным, графическим и аналитическим способами.

- Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения вероятностей одной из них не зависит от того какие возможные значения приняла другая.

Если $F(x)$ - функция распределения,

то $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Если X - непрерывная случайная величина, то $P(X = \alpha) = 0$.

$$P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X < \beta) =$$

$$= P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta).$$

- Если X - дискретная случайная величина,

то $$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i).$$

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	....	p_n

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1.$$

$$x \le x_1, \qquad F(x) = P(X < x_1) = 0;$$

$$x_1 < x \le x_2, \qquad F(x) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1;$$

$$x_2 < x \le x_3, \qquad F(x) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2;$$

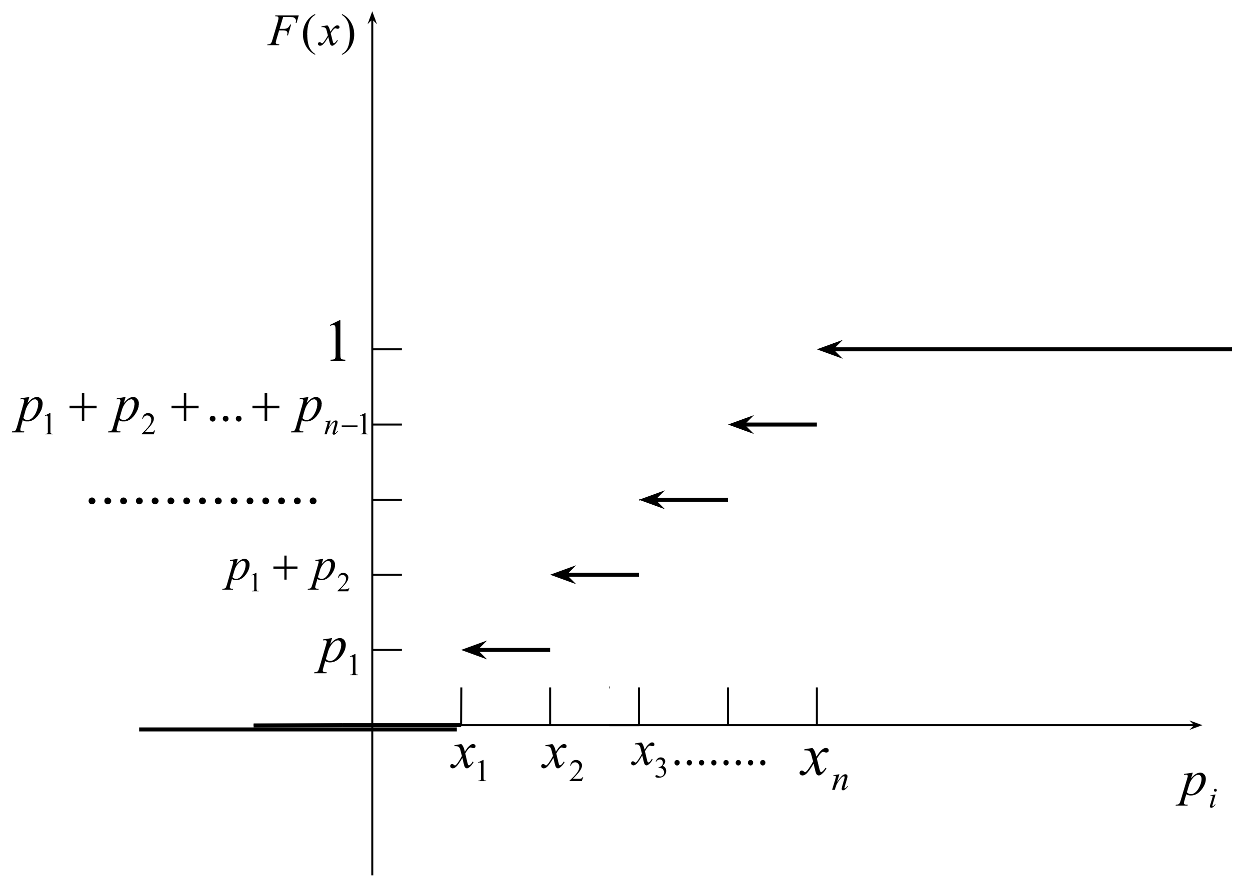
....

$$x_{n-1} < x \le x_n, \quad F(x) = P(X < x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_{n-1}) =$$

$$= p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1};$$

$$x > x_n, \qquad F(x) = P(X < x_n) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

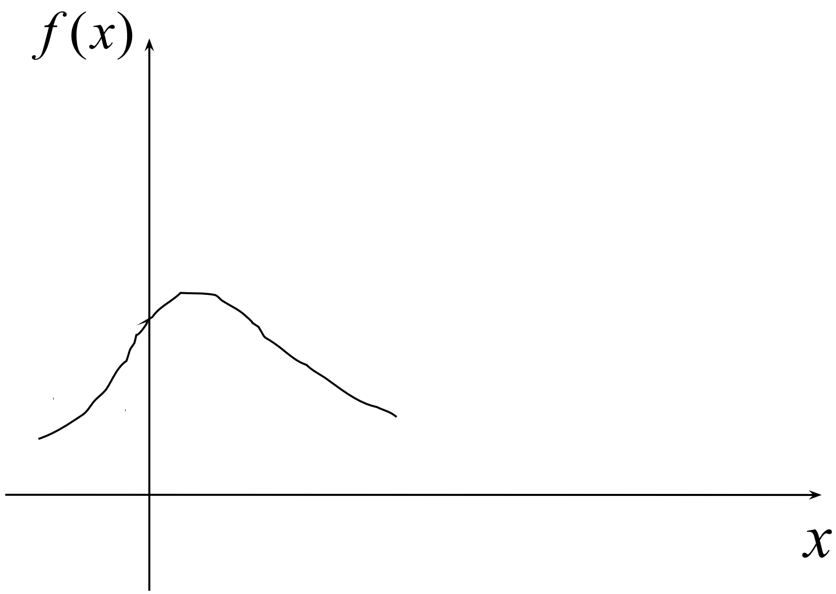
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ p_1, & x_1 < x \le x_2; \\ p_1+p_2, & x_2 < x \le x_3; \\ \dots\dots\dots\dots & \\ p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$



$F(x)$
1
$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$
....
$p_1 + p_2$
p_1
x_1
x_2
x_3........
x_n
p_i

Дифференциальной функцией распределения или ***плотностью распределения вероятностей*** наз. первая производная интегральной функции распределения $F(x)$.

График дифференциальной функции распределения $f(x)$ наз. ***кривой распределения***:



Свойства плотности распределения вероятности.

- 1.Для $\forall x \quad f(x) \geq 0.$
- 2.Для $f(x)$ имеет место равенство

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

- 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$
- 4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Числовые характеристики случайных величин.

Математическое ожидание.

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	....	p_n

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1.$$

Математическим ожиданием MX дискретной случайной величины X наз. сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности появления этих значений:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Пусть случайная величина X приняла значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Причем x_1 появилось m_1 раз,

x_2 появилось m_2 раз,

………………………….,

x_k появилось m_k раз.

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots + x_k \cdot m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{m_k}{n},$$

где

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат $[a;b]$, называется

$$\int_a^b f(x)dx.$$

- Если возможные значения принадлежат

$[-\infty;+\infty]$, то $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

Свойства математического ожидания

1. $MC = C.$

2. $M(CX) = C \cdot MC.$

3. Если X, Y – независимые случайные величины, то $M(X \pm Y) = MX \pm MY.$

4. Если X, Y – независимые случайные величины, то $M(XY) = MX \cdot MY.$

5. $M(X - MX) = 0.$

- Пример 1.

x_i	2	5	8	19
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

$$MX = 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}4 + 19 \cdot 0{,}1 = 7.$$

Пример 2.

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<1; \\ x-1, & 1\le x<2; \\ -x+3, & 2\le x<3; \\ 0, & x\ge 3. \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0dx + \int_{1}^{2} x \cdot (x-1)dx + \int_{2}^{3} x \cdot (3-x)dx + \int_{3}^{+\infty} x \cdot 0dx = \int_{1}^{2} (x^2 - x)dx +$$

$$+ \int_{2}^{3} (3x - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right)_1^2 + \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)_2^2 = 2.$$

Дисперсия

- Математическое ожидание квадрата отклонения СВ X от её математического ожидания MX называют дисперсией СВ X :
- $$DX = M(X - MX)^2.$$

- Если СВ X - дискретная СВ, то

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 \cdot p_i .$$

- Если СВ X - дискретная СВ, то

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x) dx.$$

- Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(x) = \sqrt{DX}.$$

Свойства дисперсии

- 1. $D(X \pm Y) = DX \pm DY.$
- 2. $DC = 0.$
- 3. $D(CX) = C^2 \cdot DX.$
- 4. $DX = MX^2 - (MX)^2.$
- 5. $D(X - MX) = DX.$

Вопросы:

1)Определения дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины?

2)Числовые характеристики ДСВ?

3)Числовые характеристики НСВ?