

Лекция 15.

Тема: Случайные величины и их числовые характеристики.

Цель: Ознакомиться с понятиями дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины.

- Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

- Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество возможных значений которой либо конечно, либо бесконечно, но обязательно счетно.

- Непрерывной случайной величиной называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала.

- Случайные величины: X, Y, Z, \dots ;
- значения: x, y, z, \dots .

- Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

- Закон распределения случайной величины можно задать, как и функцию: табличным, графическим и аналитическим способами.

- Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения вероятностей одной из них не зависит от того какие возможные значения приняла другая.

Если $F(x)$ - функция распределения,

то $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

Если X - непрерывная случайная

величина, то $P(X = \alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq X < \beta) &= P(\alpha < X < \beta) = \\ &= P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha < X \leq \beta). \end{aligned}$$

- Если X - дискретная случайная величина,

то
$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

x_i	x_1	x_2	x_3	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	p_n

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1.$$

$$x \leq x_1, \quad F(x) = P(X < x_1) = 0;$$

$$x_1 < x \leq x_2, \quad F(x) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1;$$

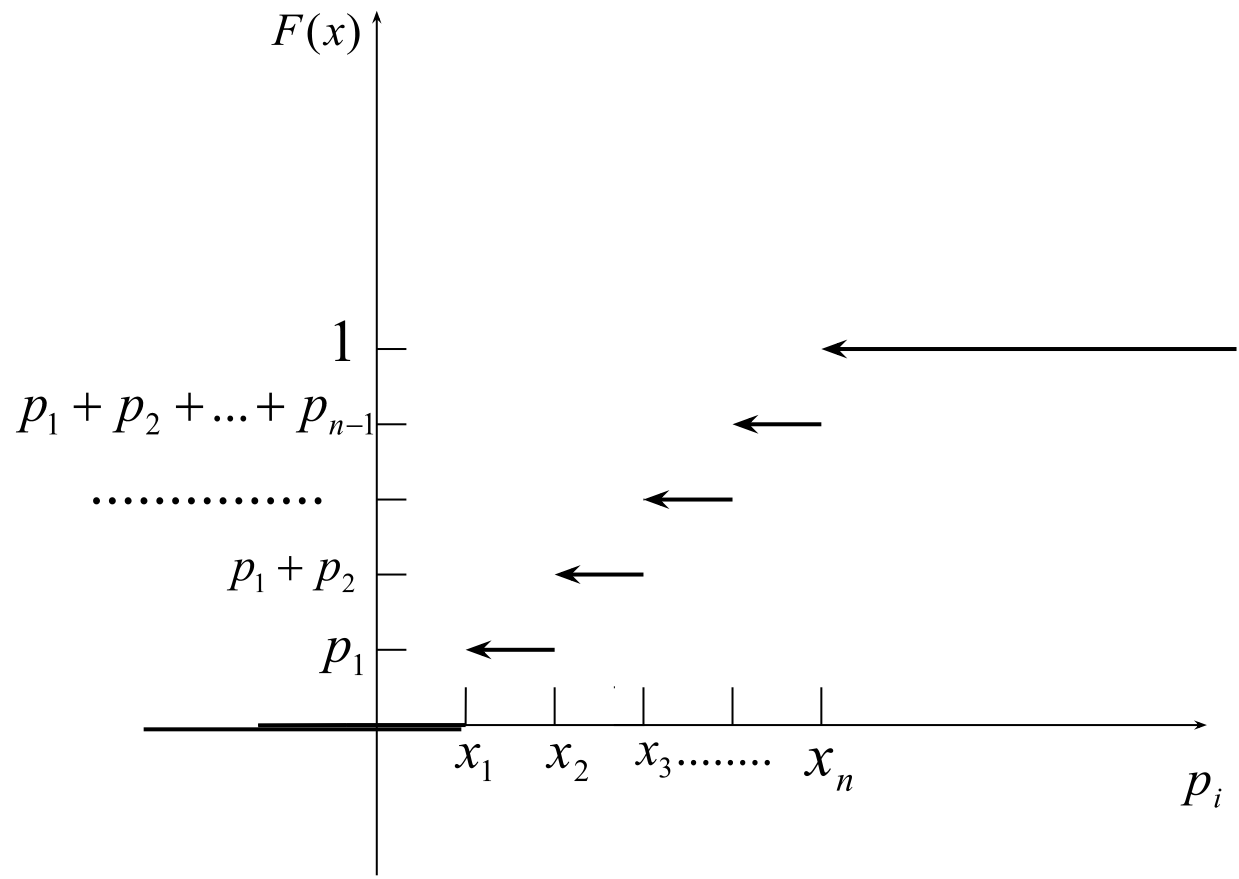
$$x_2 < x \leq x_3, \quad F(x) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2;$$

.....

$$x_{n-1} < x \leq x_n, \quad F(x) = P(X < x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_{n-1}) = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1};$$

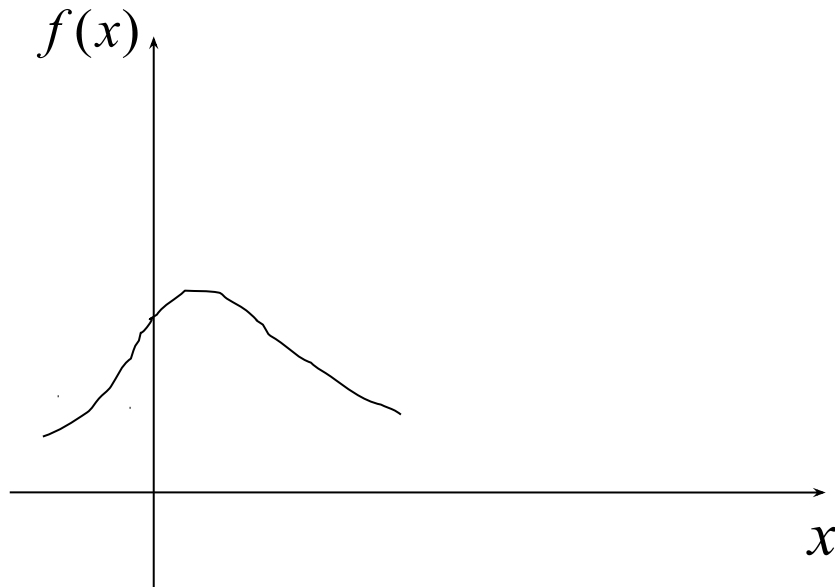
$$x > x_n, \quad F(x) = P(X < x_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3; \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \leq x_n; \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$



**Дифференциальной функцией
распределения или плотностью
распределения вероятностей** наз.
первая производная интегральной
функции распределения $F(x)$.

График дифференциальной функции распределения $f(x)$ наз. **кривой распределения**:



Свойства плотности распределения вероятности.

- 1. Для $\forall x \quad f(x) \geq 0$.
- 2. Для $f(x)$ имеет место равенство

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

- 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

- 4. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Числовые характеристики случайных величин.

Математическое ожидание.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	p_n

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1.$$

Математическим ожиданием

MX

дискретной случайной величины X наз.

сумма произведений всех возможных значений случайной величины на

соответствующие вероятности появления

этих значений:

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$$

Пусть случайная величина X приняла значения x_1, x_2, \dots, x_k .

Причем x_1 появилось m_1 раз,
 x_2 появилось m_2 раз,
.....,
 x_k появилось m_k раз.

$$\bar{X} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \dots + x_k \cdot m_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{m_k}{n},$$

где $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат $[a; b]$, называется

$$\int_a^b f(x)dx.$$

- Если возможные значения принадлежат

$$[-\infty; +\infty], \text{ то } MX = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Свойства математического ожидания

1. $MC = C$.
2. $M(CX) = C \cdot MC$.
3. Если X, Y – независимые случайные величины, то $M(X \pm Y) = MX \pm MY$.
4. Если X, Y – независимые случайные величины, то $M(XY) = MX \cdot MY$.
5. $M(X - MX) = 0$.

- Пример 1.

x_i	2	5	8	19
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

$$MX = 2 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,4 + 19 \cdot 0,1 = 7.$$

Пример 2.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ x - 1, & 1 \leq x < 2; \\ -x + 3, & 2 \leq x < 3; \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^2 x \cdot (x-1) dx + \int_2^3 x \cdot (3-x) dx + \int_3^{+\infty} x \cdot 0 dx = \int_1^2 (x^2 - x) dx +$$

$$+ \int_2^3 (3x - x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 = 2.$$

Дисперсия

- Математическое ожидание квадрата отклонения СВ от её X математического ожидания MX называют дисперсией СВ X :

- $$DX = M(X - MX)^2.$$

- Если СВ X - дискретная СВ, то

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 \cdot p_i.$$

- Если СВ X - дискретная СВ, то

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x) dx.$$

- Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(x) = \sqrt{DX}.$$

Свойства дисперсии

- 1. $D(X \pm Y) = DX \pm DY.$
- 2. $DC = 0.$
- 3. $D(CX) = C^2 \cdot DX.$
- 4. $DX = MX^2 - (MX)^2.$
- 5. $D(X - MX) = DX.$

Вопросы:

- 1) Определения дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины?
- 2) Числовые характеристики ДСВ?
- 3) Числовые характеристики НСВ?