литература

« QUE SAIS-JE ? »

LE POINT DES CONNAISSANCES ACTUELLES

PROBABILITÉ ET CERTITUDE

par

Émile BOREL

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes

Directeur honoraire de l'École Normale Supérieure

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1956

QUATORZIÈME MILLE

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

ВЕРОЯТНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ

Перевод
со второго французского издания
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Под редакцией и с предисловием
Б. В. ГНЕДЕНКО

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1969

Случайные величины и их законы распределения

Определение случайной величины

- это числовая функция, заданная на множестве элементарных событий

$$\{\omega_i \in \Omega\}$$

с областью значений в $\Re$

Или в $\Re_N$

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

теперь под случайным событием понимается попадание случайной величины в некоторое конечное или бесконечное числовое множество

Обычно рассматривают два вида случайных величин:

дискретные

и

непрерывные.

Дискретная случайная величина

- принимает конечное или счетное множество значений
- она используется при описании измерений, принимающих *целочисленные значения:*
- Число дефектных изделий в партии,

  число телефонных вызовов за смену,

  число неисправностей в приборе и т.д. и может быть записана в виде последовательности

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

Непрерывные случайные величины

принимают любое значение в некотором интервале:

- продолжительность работы электрической лампы;
- дальность полета снаряда,
- уровень воды в половодье и т.д.

Закон распределения дискретной случайной величины

Для полного описания дискретной случайной величины необходимо:

- Указать все её возможные значения.
- Задать вероятности, с которыми принимаются эти значения.

Ряд распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n	$\dots$
P	P_1	P_2	$\dots$	P_i	$\dots$	P_n	$\dots$

события $\{X = x_i\}$ образуют полную группу событий, поэтому справедливо *условие нормировки*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \qquad (2.1.)$$

Полагают, что $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_i < x_{i+1} \cdots$.

Функция распределения случайной величины

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} F(x).$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = P(x \leqslant x_0).$$

Свойства функции распределения

Функция $F(x)$ может иметь разрывы только первого рода, причем в силу монотонности $F(x)$ и неравенства $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ таких скачков конечное или счетное множество.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \Longleftrightarrow \{\text{Невозможное событие}\},$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \Longleftrightarrow \{\text{Достоверное событие}\}$$

Свойства функции распределения

$$P(a \leqslant x < b) = F(b) - F(a)$$

Для дискретной СВ

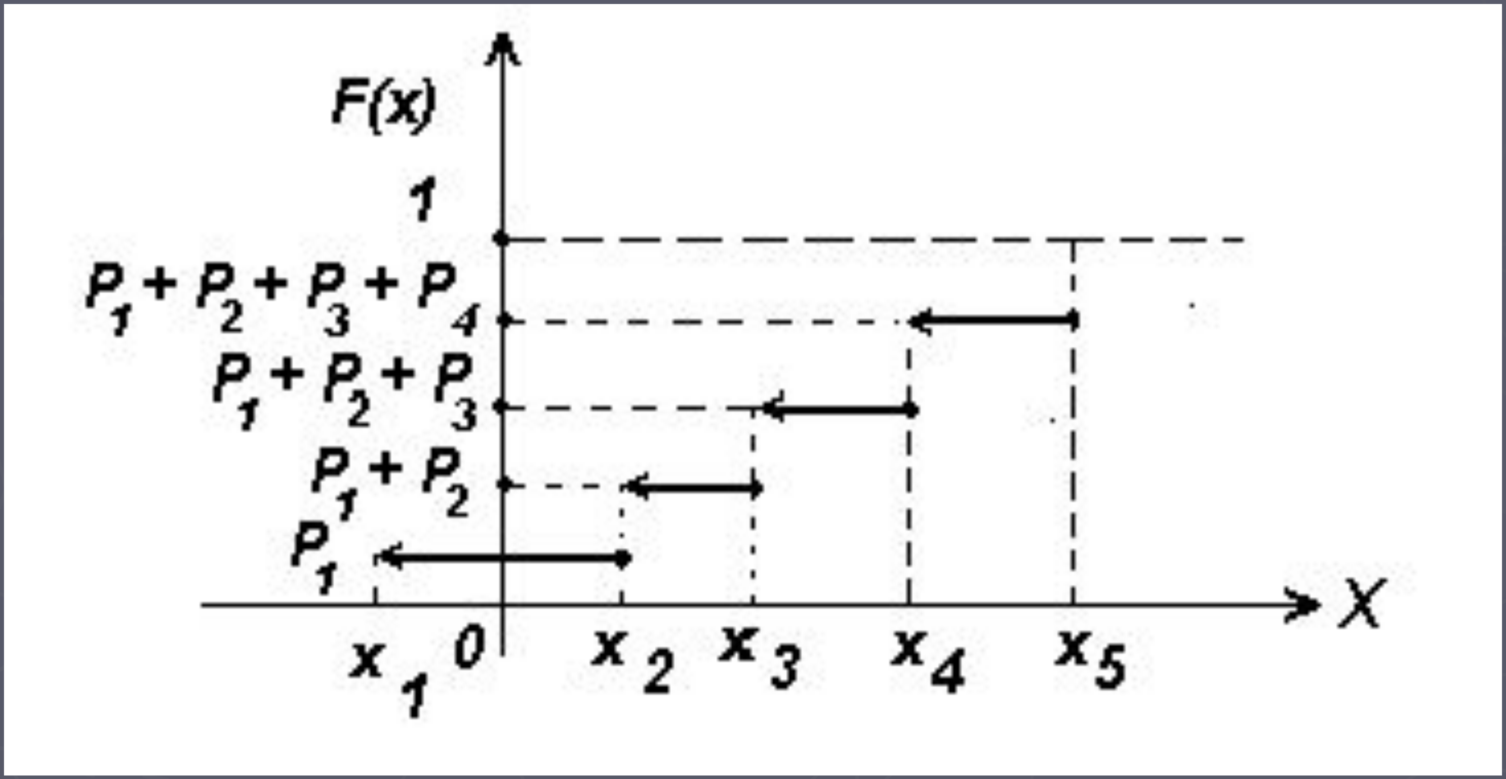
$x_{i-1} < x \leqslant x_i$

$$F(x) = P_1 + P_2 + \cdots + P_{i-1} = \sum_{i=1}^{i-1} P_i.$$

В точке x_i $F(x)$ имеет скачок

$$P_i = P(X = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i).$$

Свойства функции распределения



Непрерывная случайная величина

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна

$$dF(x) = f(x)dx \approx F(x+dx) - F(x) = P(x \in (x,\ x+dx))$$

Свойства $f(x)$:

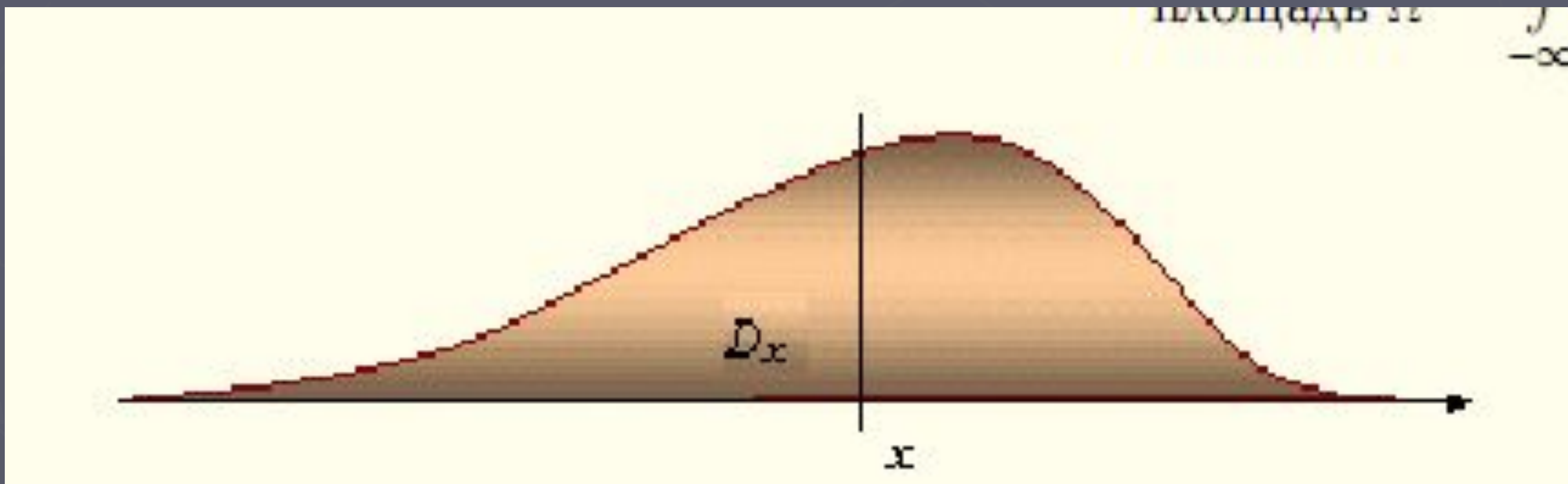
$f(x) \geqslant 0$, т.е. не отрицательная функция;

$$P(a \leqslant x < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$ (условие нормировки);

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

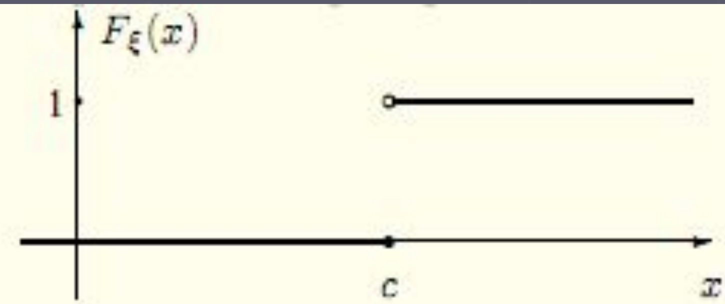
Геометрический смысл плотности



Примеры

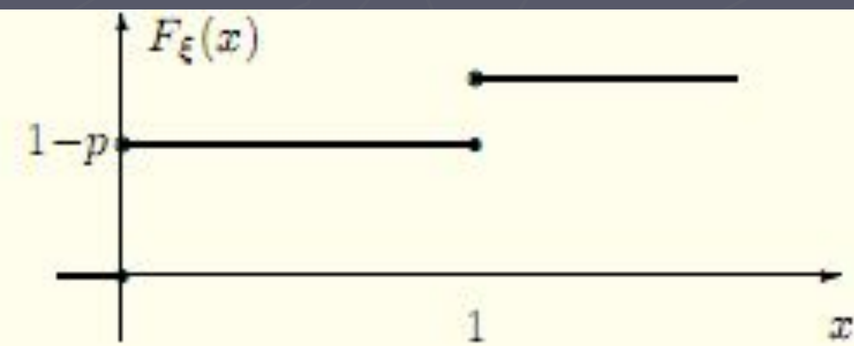
Вырожденное распределение (Распределение константы)

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \mathsf{P}(c < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c; \\ 1, & x > c. \end{cases}$$



Распределение Бернулли (Распределение индикатора события)

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1-p, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Равномерное распределение

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$