



СОБЫТИЯ И ИХ ВИДЫ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ.



Козлова Светлана Викторовна
преподаватель математики
КГБПОУ «Назаровский энергостроительный
техникум»
г. Назарово Красноярского края



Теория вероятностей – это раздел математики, изучающий *вероятностные закономерности* массовых однородных случайных событий.



- **Опыт** (испытание) – совокупность условий, при которых рассматривается появление случайного события.
- **Исход** - это результат опыта (испытания).
- **Событие** – это ожидаемый результат опыта (испытания).



СОБЫТІЯ

Досто
верны
е

Невоз
можн
ые

Случа
йные



ЗАДАНИЕ 1.

Для каждого из следующих опытов определить какие события являются достоверными, случайными, невозможными.

Опыт 1. В группе 25 студентов, есть юноши и есть девушки.

События:

- a) случайным образом выбранный студент – девушка;
- b) у двоих студентов день рождения 31 февраля;
- c) всем студентам группы больше 13 лет.

Опыт 2. При бросании трех игральных костей.

События:

- a) сумма выпавших на трех костях очков меньше 15;
- b) на первой кости выпало 2 очка, на второй – 3 очка, на третьей – 6 очков;
- c) сумма выпавших на трех костях очков равна 19.



равновозможные

Не равновозможные

СОБЫТ
ИЯ



СОБЫТИЯ

The diagram features two red dice. A large grey oval with a red border encloses the word 'СОБЫТИЯ'. Two white curved arrows point from this oval to two rounded rectangular boxes: one on the left containing the underlined word 'СОВМЕСТНЫЕ' and one on the right containing the underlined word 'НЕСОВМЕСТНЫЕ'. A white straight arrow points from the 'НЕСОВМЕСТНЫЕ' box down to a third rounded rectangular box at the bottom right containing the underlined word 'ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ'. The background is a blurred image of the dice.

СОВМЕСТНЫЕ

НЕСОВМЕСТНЫЕ

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ



ЗАДАНИЕ 2.

Найти пары совместных и несовместных событий, связанных с однократным бросанием игральной кости.

- 1) выпало 3 очка,
- 2) выпало нечетное число очков,
- 3) выпало менее 4 очков,
- 4) выпало 6 очков,
- 5) выпало четное число очков,
- 6) выпало более 4 очков.



ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Совокупность событий A_1, A_2, \dots, A_n образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Например: При подбрасывании игральной кости полная группа событий состоит из сл событий:

A_1 - «выпадение 1 очка», A_2 - «выпадение 2 очков»,
 A_3 - «выпадение 3 очков», A_4 - «выпадение 4
очков», A_5 - «выпадение 5 очков», A_6 - «выпадение
6 очков».



КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов опыта, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных элементарных исходов опыта:

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{число благоприятствующих исходов}}{\text{число всех равновозможных исходов}}, \text{ где}$$

A – событие,

m – число благоприятствующих исходов опыта,

n – число всех равновозможных элементарных исходов опыта,

$P(A)$ – вероятность наступления события A .



СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЯ

1. Если A – событие, то $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Если A – достоверное событие, то $P(A) = 1$.
3. Если A – невозможное событие, то $P(A) = 0$.
4. Если A – случайное событие, то

$$0 < P(A) < 1.$$

5. Если A и \bar{A} – противоположные события, то

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

6. Если $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – полная группа событий, то

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1$$



ЗАДАЧА 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) не чёрным.

Дано:

A - «Наугад извлеченный шар окажется белым»;

$$m_A = 15;$$

B - «Наугад извлеченный шар окажется не черным»;

$$m_B = 15 + 5 = 20;$$

$$n = 30.$$

а) $P(A) = ?$

б) $P(B) = ?$

Решение:

$$а) \frac{\text{15 белых шаров}}{\text{30 шаров}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

$$б) \frac{\text{15 белых шаров} + \text{5 красных шаров}}{\text{30 шаров}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $P[A] = \frac{1}{2}$; $P[B] = \frac{2}{3}$.



События А и В называются **независимыми**, если появление события В не оказывает влияния на появление события А, а появление события А не оказывает влияния на появление события В.



ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

Сложение вероятностей
несовместных событий

наступит
или А, или
В

$$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Умножение вероятностей
несовместных событий

наступит и
А, и В

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Сложение вероятностей
совместных независимых
событий

наступит
или А, или
В, или А и
В

$$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$



САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p>№1. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.</p>	<p>№1. Аптека получила лекарства в коробках с трех оптовых складов: пять с 1-го, три со 2-го, шесть с 3-го. Случайным образом выбрана коробка для продажи. Какова вероятность того, что это будет коробка со второго или третьего склада.</p>
<p>№2. В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут белыми.</p>	<p>№2. В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут черными.</p>
<p>№3. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в мишень.</p>	<p>№3. Груз в пункт назначения можно доставить речным транспортом или автотранспортом. Вероятность того, что груз будет доставлен по реке, равна 0,7, автотранспортом – 0,5. Найти вероятность того, что груз будет доставлен хотя бы одним видом транспорта.</p>



РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p>№ 1. Дано: A_1 - «Выбран ящик с 1 склада» A_2 - «Выбран ящик со 2 склада» A_3 - «Выбран ящик с 3 склада» A_4 - «Выбран ящик с 4 склада» B - «Выбран ящик с 1 или 3 склада» $n = 4 + 5 + 7 + 4 = 20$, $\square\square_{11} = 4, \square\square_{12} = 5$, $\square\square_{13} = 7, \square\square_{14} = 4$.</p>	<p>№ 1. Дано: A_1 - «Выбрана коробка с 1 склада» A_2 - «Выбрана коробка со 2 склада» A_3 - «Выбрана коробка с 3 склада» B - «Выбрана коробка со 2 или 3 склада» $n = 5 + 3 + 6 = 14$, $\square\square_{11} = 5, \square\square_{12} = 3, \square\square_{13} = 6$,</p>
<p>$P[B] = ?$</p>	<p>$\square\square\square\square = ?$</p>
<p>Решение:</p> $P[A_1] = \frac{\square\square_{11}}{\square\square} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2.$ $\square\square\square_3 = \frac{\square\square_{13}}{\square\square} = \frac{7}{20} = 0,35.$ $\square\square\square\square = \square\square\square_1 + \square\square_2 = \square\square\square_1 + \square\square\square_2 = 0,2 + 0,35 = 0,55.$ <p>Ответ: $P(B) = 0,55$</p>	<p>Решение:</p> $P[A_2] = \frac{\square\square_{12}}{\square\square} = \frac{3}{14}.$ $\square\square\square_3 = \frac{\square\square_{13}}{\square\square} = \frac{6}{14}.$ $\square\square\square\square = \square\square\square_2 + \square\square_3 = \square\square\square_2 + \square\square\square_3 = \frac{3}{14} + \frac{6}{14} = \frac{9}{14}.$ <p>Ответ: $P[B] = \frac{9}{14}$.</p>

РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p>№ 2. Дано:</p> <p>A_1 - «Из 1 урны извлечен белый шар»;</p> <p>A_2 - «Из 2 урны извлечен белый шар»;</p> <p>A_3 - «Из 3 урны извлечен белый шар»;</p> <p>A - «Все три шара белые»;</p> <p>$n = 6 + 4 = 10$,</p> <p>$\square\square_{11} = \square\square_{22} = \square\square_{33} = 6$.</p>	<p>№ 2. Дано:</p> <p>A_1 - «Из 1 урны извлечен черный шар»;</p> <p>A_2 - «Из 2 урны извлечен черный шар»;</p> <p>A_3 - «Из 3 урны извлечен черный шар»;</p> <p>A - «Все три шара черные»;</p> <p>$n = 6 + 4 = 10$,</p> <p>$\square\square_{11} = \square\square_{22} = \square\square_{33} = 4$.</p>
<p>$\square\square\square\square = ?$</p>	<p>$\square\square\square\square = ?$</p>
<p>Решение:</p> $P[A_1] = P[A_2] = P[A_3] =$ $= \frac{\square\square_{11}}{\square\square} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6.$ $\square\square\square\square = \square\square\square_{11} \cdot \square\square\square_{22} \cdot \square\square\square_{33} =$ $= 0,6^3 = 0,216.$ <p>Ответ: $P[A] = 0,216$.</p>	<p>Решение:</p> $P[A_1] = P[A_2] = P[A_3] =$ $= \frac{\square\square_{11}}{\square\square} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4..$ $\square\square\square\square = \square\square\square_{11} \cdot \square\square\square_{22} \cdot \square\square\square_{33} =$ $= 0,4^3 = 0,064.$ <p>Ответ: $P[A] = 0,064$.</p>

РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p>№ 3. Дано: А – «Первый стрелок попал в мишень», $P(A) = 0,8$; В – «Второй стрелок попал в мишень», $P(B) = 0,6$; С – «Хотя бы один стрелок попал в мишень».</p>	<p>№ 3. Дано: А – «Груз доставлен речным транспортом», $P(A) = 0,7$; В – «Груз доставлен автотранспортом», $P(B) = 0,5$; С – «Груз доставлен хотя бы одним видом транспорта».</p>
$P(C) = ?$	$P(C) = ?$
<p>Решение: $P[C] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = 0,8 + 0,6 - 0,8 \cdot 0,6 = 0,92$. Ответ: $P(C) = 0,92$.</p>	<p>Решение: $P[C] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = 0,7 + 0,5 - 0,7 \cdot 0,5 = 0,85$. Ответ: $P(C) = 0,85$.</p>



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задача 1. Записать два испытания и для каждого из них подобрать достоверное, невозможное и случайное событие.

Задача 2. Деталь проходит две операции обработки. Вероятность появления брака при первой операции равна 0,02, при второй – 0,03. Найдите вероятность получения детали без брака после двух операций, предполагая, что события получения брака на отдельных операциях являются независимыми.



ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдет в данном опыте.

Например:

Опыт: извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.

Достоверное событие: «извлеченный, на удачу, мяч окажется красным».



НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно не может произойти в данном опыте.

Например:

Опыт: извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.

Невозможное событие: «извлеченный, на удачу, мяч окажется зеленым».



СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **случайным** в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти в данном опыте.

Например:

Опыт: сдача студентом экзамена по математике.

Случайное событие: «студент на экзамене получит оценку отлично».



РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

• События называются **равновозможными**, если нет основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Например:

- ✓ выпадение орла или решки при броске монеты;
 - ✓ выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
 - ✓ извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды карт.
- При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.



НЕ РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

События называются **не равновозможными**, если есть основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

*Например, если у монеты или кубика смещён **центр тяжести**, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани.*



СОВМЕСТИМЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называют **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого.

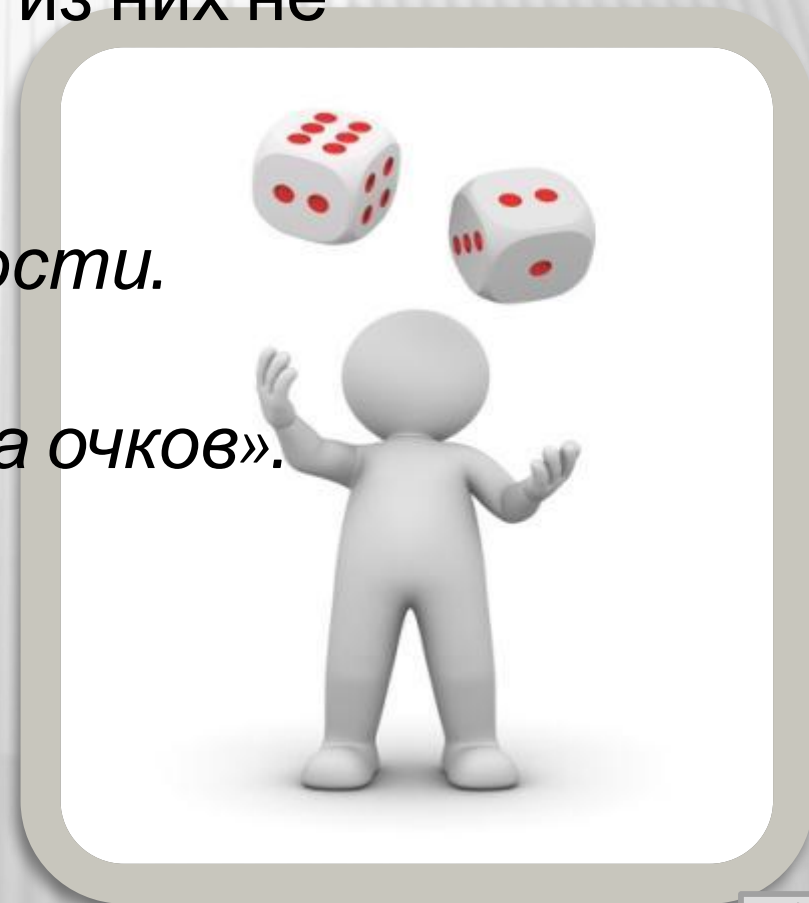
Например:

Опыт: бросание игральной кости.

Совместные события:

А. «Выпадение четного числа очков».

В. «Выпадение 4 очков».



НЕСОВМЕСТИМЫЕ СОБЫТИЯ

- Два события называются **несовместными** в данном опыте, если они не могут появиться вместе в одном и том же опыте.

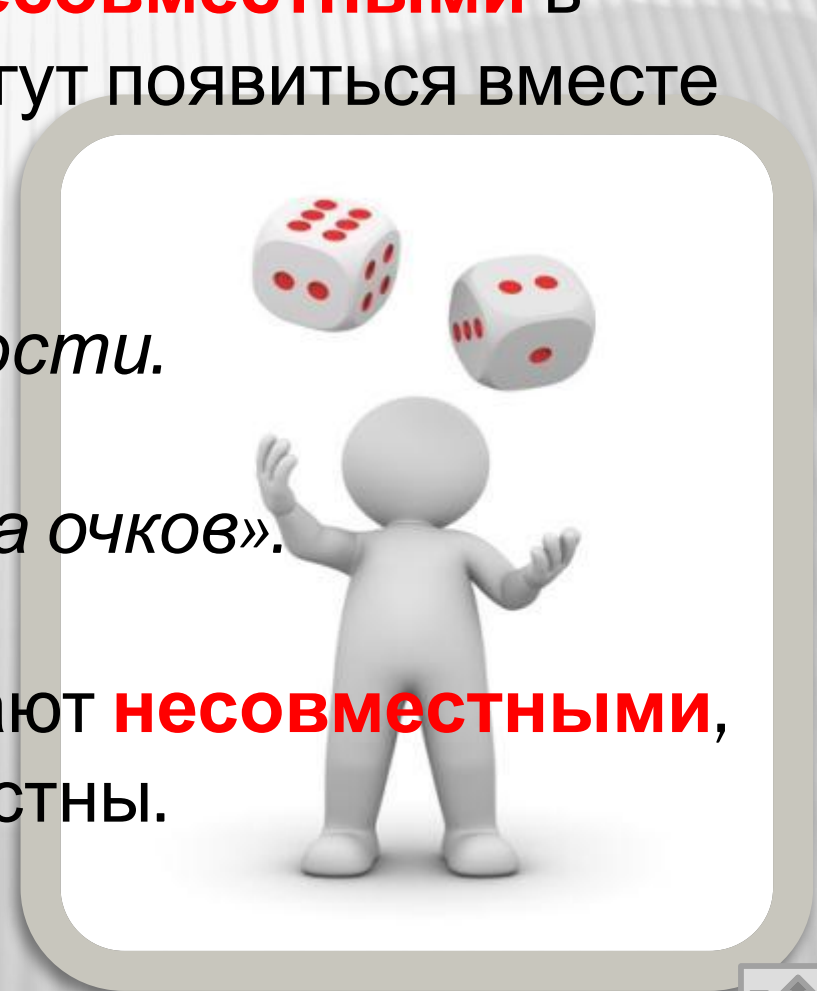
Например:

Опыт: бросание игральной кости.

Несовместные события:

1. «Выпадение четного числа очков».
2. «Выпадение 3 очков».

- Несколько событий называют **несовместными**, если они попарно несовместны.



ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно не появлению другого (это простейший пример несовместных событий).

Например:

Опыт: покупка лотерейного билета

Противоположные события:

A – «выпадение выигрыша на купленный билет».

\bar{A} – «не выпадение выигрыша на тот же билет»



ЗАДАЧА

2.

На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено 1 бригадой, 15 – 2 бригадой и 10 – 3 бригадой. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная 2 или 3 бригадой.

Дано:

A – «На сборку поступила деталь, изготовленная 2 бригадой»;

B – «На сборку поступила деталь, изготовленная 3 бригадой»;

$$m_A = 15;$$

$$m_B = 10;$$

$$n = 50.$$

$$P(A + B) = ?$$

Решение:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{15}{50} = \frac{3}{10} \\ P(B) &= \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \\ P(A + B) &= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ответ: $P(A + B) = 0,5$



ЗАДАЧА 3.

Прибор, работающий в течении времени t , состоит из 3 узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени t отказать (выйти из строя). Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время t вероятность безотказной работы 1 узла = 0,8, 2 узла = 0,9, 3 узла = 0,7. Найти надежность прибора в целом.

Дано:

A - «Безотказная работа прибора»;

A_1 - «Безотказная работа 1 узла», $P(A_1) = 0,8$;

A_2 - «Безотказная работа 2 узла», $P(A_2) = 0,9$;

A_3 - «Безотказная работа 3 узла», $P(A_3) = 0,7$.

$P(A) = ?$

Решение:

$$P[A] = P[A_1] \cdot P[A_2] \cdot P[A_3] = \\ = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$$

Ответ: $P(A) = 0,504$.



ЗАДАЧА 4.

Вероятность попадания в мишень для 1 стрелка 0,85, а для 2 стрелка 0,8. Стрелки независимо друг от друга произвели по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок?

Дано:

A – «Попадание 1 стрелка», $P(A) = 0,85$;

B – «Попадание 2 стрелка», $P(B) = 0,8$;

C – «Попадание хотя бы одного стрелка»

$P(C) = ?$

Решение:

$$\begin{aligned} P[C] &= P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = \\ &= 0,85 + 0,8 - 0,85 \cdot 0,8 = \\ &= 0,97 \end{aligned}$$

Ответ: $P(C) = 0,97$.



ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Блез Паскаль

(19 июня 1623г. – 19 августа 1662г)

французский математик,
физик, философ, один из
основателей
математического анализа,
теории вероятностей и
проектной геометрии

ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пьер де Ферма

(17 августа 1601 — 12 января 1665)

французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе.



ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Христиан Гюйгенс

(14 апреля 1629, Гаага —
8 июля 1695, Гаага)

нидерландский механик,
физик, математик, астроном и
изобретатель. Один из
основоположников теоретической
механики и теории вероятностей.
Первый иностранный член
Лондонского королевского
общества (1663), член Французской
академии наук с момента её
основания (1666) и её первый
президент (1666—1681)

ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Якоб Бернулли

(6 января 1655, Базель, —
16 августа 1705, там же)

швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли, совместно с ним положил начало вариационному исчислению. Доказал частный случай закона больших чисел — теорему Бернулли. Профессор математики Базельского университета (с 1687 года) Иностранный член Парижской академии наук (1699) и Берлинской академии наук



ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА И ИНТЕРНЕТ РЕСУРСЫ

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник – 2-е издание – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. 2005. – 552с. – (Профессиональное образование).
2. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. 2005. – 352с. – (Профессиональное образование).
3. http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/История_теории_вероятностей
5. http://sernam.ru/book_tp.php?id=11
6. [картинки теория вероятностей](#)

