



# СОБЫТИЯ И ИХ ВИДЫ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ.



Козлова Светлана Викторовна  
преподаватель математики  
КГБПОУ «Назаровский энергостроительный  
техникум»  
г. Назарово Красноярского края



**Теория вероятностей** – это раздел математики, изучающий *вероятностные закономерности* массовых однородных случайных событий.



- **Опыт** (испытание) – совокупность условий, при которых рассматривается появление случайного события.
- **Исход** - это результат опыта (испытания).
- **Событие** – это ожидаемый результат опыта (испытания).



# СОБЫТІЯ

Досто  
верны  
е

Невоз  
можн  
ые

Случа  
йные





## ЗАДАНИЕ 1.

Для каждого из следующих опытов определить какие события являются достоверными, случайными, невозможными.

Опыт 1. В группе 25 студентов, есть юноши и есть девушки.

События:

- a) случайным образом выбранный студент – девушка;
- b) у двоих студентов день рождения 31 февраля;
- c) всем студентам группы больше 13 лет.

Опыт 2. При бросании трех игральных костей.

События:

- a) сумма выпавших на трех костях очков меньше 15;
- b) на первой кости выпало 2 очка, на второй – 3 очка, на третьей – 6 очков;
- c) сумма выпавших на трех костях очков равна 19.



равновозможные

Не равновозможные

СОБЫТ  
ИЯ



СОБЫТИЯ

The diagram features two red dice. A large grey oval with a red border is positioned above the dice, containing the word 'СОБЫТИЯ'. Two white curved arrows point from this oval to two rounded rectangular boxes below the dice. The left box contains the word 'СОВМЕСТНЫЕ' and the right box contains 'НЕСОВМЕСТНЫЕ'. A white arrow points from the right box down to a third rounded rectangular box at the bottom right, which contains the word 'ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ'. The background is a blurred image of the dice.

СОВМЕСТНЫЕ

НЕСОВМЕСТНЫЕ

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ





## ЗАДАНИЕ 2.

Найти пары совместных и несовместных событий, связанных с однократным бросанием игральной кости.

- 1) выпало 3 очка,
- 2) выпало нечетное число очков,
- 3) выпало менее 4 очков,
- 4) выпало 6 очков,
- 5) выпало четное число очков,
- 6) выпало более 4 очков.





# ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Совокупность событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Например: При подбрасывании игральной кости полная группа событий состоит из сл событий:

$A_1$  - «выпадение 1 очка»,  $A_2$  - «выпадение 2 очков»,  
 $A_3$  - «выпадение 3 очков»,  $A_4$  - «выпадение 4  
очков»,  $A_5$  - «выпадение 5 очков»,  $A_6$  - «выпадение  
6 очков».



# КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов опыта, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных элементарных исходов опыта:

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{число благоприятствующих исходов}}{\text{число всех равновозможных исходов}}, \text{ где}$$

$A$  – событие,

$m$  – число благоприятствующих исходов опыта,

$n$  – число всех равновозможных элементарных исходов опыта,

$P(A)$  – вероятность наступления события  $A$ .



# СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЯ

1. Если  $A$  – событие, то  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
2. Если  $A$  – достоверное событие, то  $P(A) = 1$ .
3. Если  $A$  – невозможное событие, то  $P(A) = 0$ .
4. Если  $A$  – случайное событие, то

$$0 < P(A) < 1.$$

5. Если  $A$  и  $\bar{A}$  – противоположные события, то

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

6. Если  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  – полная группа событий, то

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1$$



**ЗАДАЧА 1.** В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) не чёрным.

Дано:

A - «Наугад извлеченный шар окажется белым»;

$$m_A = 15;$$

B - «Наугад извлеченный шар окажется не черным»;

$$m_B = 15 + 5 = 20;$$

$$n = 30.$$

а)  $P(A) = ?$

б)  $P(B) = ?$

Решение:

$$а) \frac{\text{15 белых шаров}}{\text{30 шаров}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

$$б) \frac{\text{15 белых шаров} + \text{5 красных шаров}}{\text{30 шаров}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Ответ:  $P[A] = \frac{1}{2}$ ;  $P[B] = \frac{2}{3}$ .





События А и В называются **независимыми**, если появление события В не оказывает влияния на появление события А, а появление события А не оказывает влияния на появление события В.



# ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

Сложение вероятностей  
несовместных событий

наступит  
или А, или  
В

$$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Умножение вероятностей  
несовместных событий

наступит и  
А, и В

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Сложение вероятностей  
совместных независимых  
событий

наступит  
или А, или  
В, или А и  
В

$$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$



# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p><b>№1.</b> Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.</p>	<p><b>№1.</b> Аптека получила лекарства в коробках с трех оптовых складов: пять с 1-го, три со 2-го, шесть с 3-го. Случайным образом выбрана коробка для продажи. Какова вероятность того, что это будет коробка со второго или третьего склада.</p>
<p><b>№2.</b> В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут белыми.</p>	<p><b>№2.</b> В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут черными.</p>
<p><b>№3.</b> Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в мишень.</p>	<p><b>№3.</b> Груз в пункт назначения можно доставить речным транспортом или автотранспортом. Вероятность того, что груз будет доставлен по реке, равна 0,7, автотранспортом – 0,5. Найти вероятность того, что груз будет доставлен хотя бы одним видом транспорта.</p>



# РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p><b>№ 1. Дано:</b>  <math>A_1</math> - «Выбран ящик с 1 склада»  <math>A_2</math> - «Выбран ящик со 2 склада»  <math>A_3</math> - «Выбран ящик с 3 склада»  <math>A_4</math> - «Выбран ящик с 4 склада»  <math>B</math> - «Выбран ящик с 1 или 3 склада»  <math>n = 4 + 5 + 7 + 4 = 20</math>,  <math>n_{A_1} = 4, n_{A_2} = 5</math>,  <math>n_{A_3} = 7, n_{A_4} = 4</math>.</p>	<p><b>№ 1. Дано:</b>  <math>A_1</math> - «Выбрана коробка с 1 склада»  <math>A_2</math> - «Выбрана коробка со 2 склада»  <math>A_3</math> - «Выбрана коробка с 3 склада»  <math>B</math> - «Выбрана коробка со 2 или 3 склада»  <math>n = 5 + 3 + 6 = 14</math>,  <math>n_{A_1} = 5, n_{A_2} = 3, n_{A_3} = 6</math>,</p>
<p><math>P[B] = ?</math></p>	<p><math>P[B] = ?</math></p>
<p><b>Решение:</b></p> $P[A_1] = \frac{n_{A_1}}{n} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2.$ $P[A_3] = \frac{n_{A_3}}{n} = \frac{7}{20} = 0,35.$ $P[B] = P[A_1] + P[A_3] = \frac{4}{20} + \frac{7}{20} = \frac{11}{20} = 0,55.$ <p>Ответ: <math>P(B) = 0,55</math></p>	<p><b>Решение:</b></p> $P[A_2] = \frac{n_{A_2}}{n} = \frac{3}{14}.$ $P[A_3] = \frac{n_{A_3}}{n} = \frac{6}{14}.$ $P[B] = P[A_2] + P[A_3] = \frac{3}{14} + \frac{6}{14} = \frac{9}{14}.$ <p>Ответ: <math>P[B] = \frac{9}{14}</math>.</p>



# РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p>№ 2. Дано:</p> <p><math>A_1</math> - «Из 1 урны извлечен белый шар»,</p> <p><math>A_2</math> - «Из 2 урны извлечен белый шар»,</p> <p><math>A_3</math> - «Из 3 урны извлечен белый шар»,</p> <p><math>A</math> - «Все три шара белые»,</p> <p><math>n = 6 + 4 = 10</math>,</p> <p><math>\square_{11} = \square_{22} = \square_{33} = 6</math>.</p>	<p>№ 2. Дано:</p> <p><math>A_1</math> - «Из 1 урны извлечен черный шар»,</p> <p><math>A_2</math> - «Из 2 урны извлечен черный шар»,</p> <p><math>A_3</math> - «Из 3 урны извлечен черный шар»,</p> <p><math>A</math> - «Все три шара черные»,</p> <p><math>n = 6 + 4 = 10</math>,</p> <p><math>\square_{11} = \square_{22} = \square_{33} = 4</math>.</p>
<p><math>\square_{111111} = ?</math></p>	<p><math>\square_{111111} = ?</math></p>
<p>Решение:</p> $P[A_1] = P[A_2] = P[A_3] =$ $= \frac{\square_{11}}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6.$ $\square_{111111} = \square_{111111} \cdot \square_{222222} \cdot \square_{333333} =$ $= 0,6^3 = 0,216.$ <p>Ответ: <math>P[A] = 0,216</math>.</p>	<p>Решение:</p> $P[A_1] = P[A_2] = P[A_3] =$ $= \frac{\square_{11}}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4..$ $\square_{111111} = \square_{111111} \cdot \square_{222222} \cdot \square_{333333} =$ $= 0,4^3 = 0,064.$ <p>Ответ: <math>P[A] = 0,064</math>.</p>

# РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
<p>№ 3. Дано: А – «Первый стрелок попал в мишень», <math>P(A) = 0,8</math>; В – «Второй стрелок попал в мишень», <math>P(B) = 0,6</math>; С – «Хотя бы один стрелок попал в мишень».</p>	<p>№ 3. Дано: А – «Груз доставлен речным транспортом», <math>P(A) = 0,7</math>; В – «Груз доставлен автотранспортом», <math>P(B) = 0,5</math>; С – «Груз доставлен хотя бы одним видом транспорта».</p>
$P(C) = ?$	$P(C) = ?$
<p>Решение: <math>P[C] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = 0,8 + 0,6 - 0,8 \cdot 0,6 = 0,92</math>. Ответ: <math>P(C) = 0,92</math>.</p>	<p>Решение: <math>P[C] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = 0,7 + 0,5 - 0,7 \cdot 0,5 = 0,85</math>. Ответ: <math>P(C) = 0,85</math>.</p>



# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

**Задача 1.** Записать два испытания и для каждого из них подобрать достоверное, невозможное и случайное событие.

**Задача 2.** Деталь проходит две операции обработки. Вероятность появления брака при первой операции равна 0,02, при второй – 0,03. Найдите вероятность получения детали без брака после двух операций, предполагая, что события получения брака на отдельных операциях являются независимыми.



# ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдет в данном опыте.

Например:

Опыт: *извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.*

Достоверное событие: *«извлеченный, на удачу, мяч окажется красным».*





# НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно не может произойти в данном опыте.

Например:

Опыт: извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.

Невозможное событие: «извлеченный, на удачу, мяч окажется зеленым».



# СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **случайным** в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти в данном опыте.

Например:

Опыт: сдача студентом экзамена по математике.

Случайное событие: «студент на экзамене получит оценку отлично».



# РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

• События называются **равновозможными**, если нет основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

## Например:

- ✓ выпадение орла или решки при броске монеты;
  - ✓ выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
  - ✓ извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды карт.
- При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.



# НЕ РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

События называются **не равновозможными**, если есть основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

*Например, если у монеты или кубика смещён **центр тяжести**, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани.*





# СОВМЕСТИМЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называют **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого.

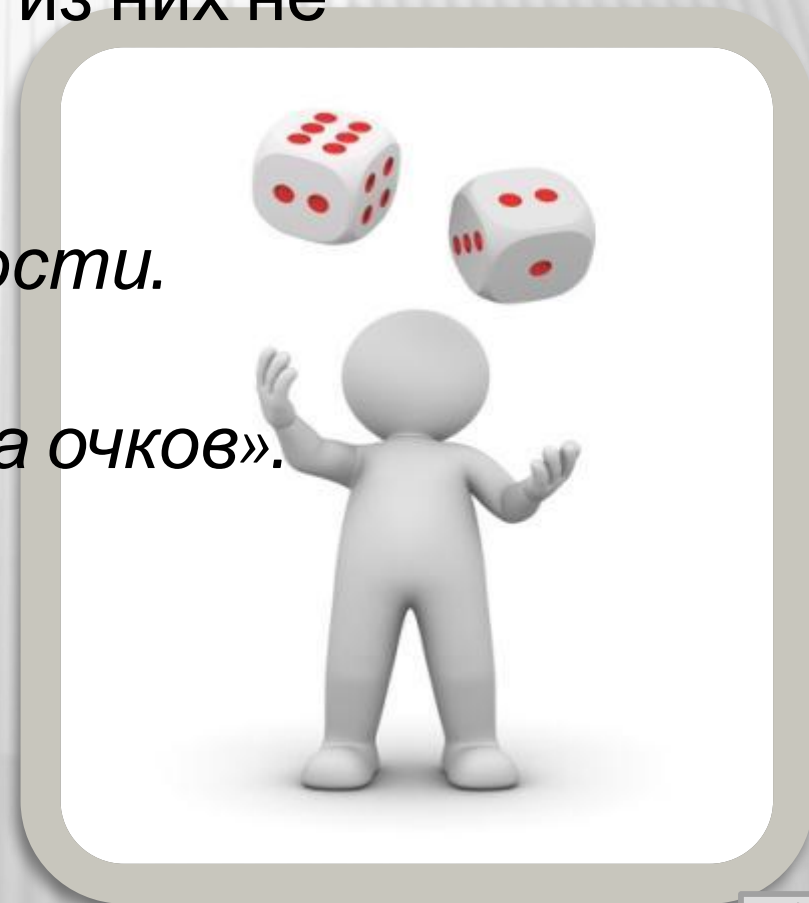
Например:

Опыт: бросание игральной кости.

Совместные события:

А. «Выпадение четного числа очков».

В. «Выпадение 4 очков».



# НЕСОВМЕСТИМЫЕ СОБЫТИЯ

- Два события называются **несовместными** в данном опыте, если они не могут появиться вместе в одном и том же опыте.

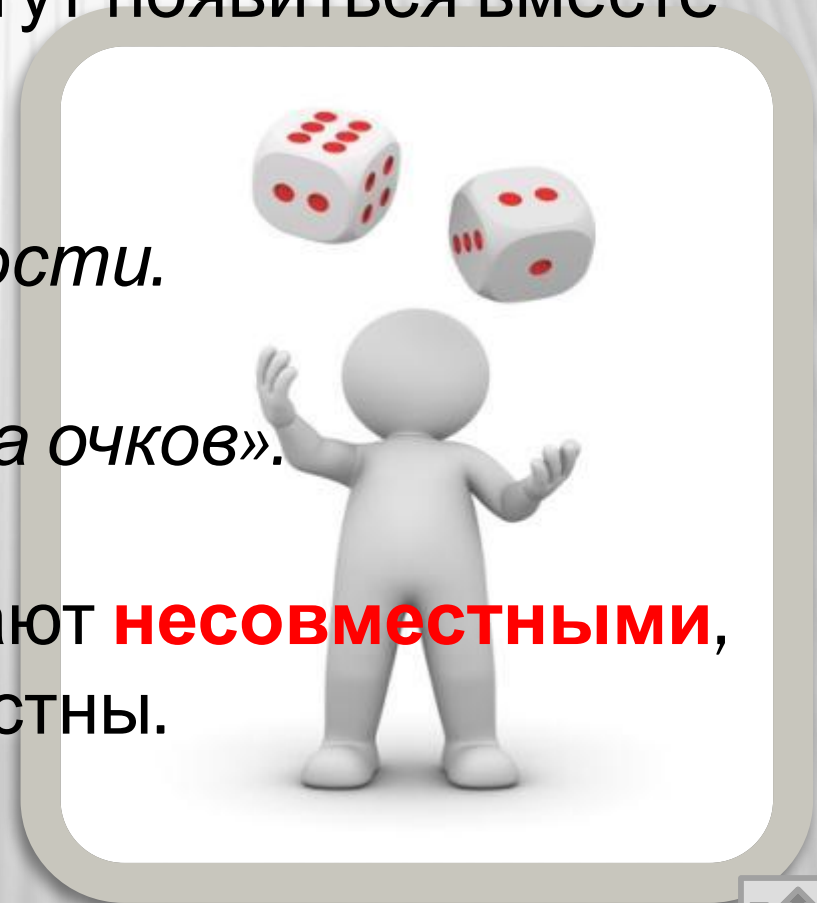
Например:

Опыт: бросание игральной кости.

Несовместные события:

1. «Выпадение четного числа очков».
2. «Выпадение 3 очков».

- Несколько событий называют **несовместными**, если они попарно несовместны.



# ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно не появлению другого (это простейший пример несовместных событий).

Например:

Опыт: покупка лотерейного билета

Противоположные события:

$A$  – «выпадение выигрыша на купленный билет».

$\bar{A}$  – «не выпадение выигрыша на тот же билет»



# ЗАДАЧА

## 2.

На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено 1 бригадой, 15 – 2 бригадой и 10 – 3 бригадой. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная 2 или 3 бригадой.

Дано:

A – «На сборку поступила деталь, изготовленная 2 бригадой»;

B – «На сборку поступила деталь, изготовленная 3 бригадой»;

$$m_A = 15;$$

$$m_B = 10;$$

$$n = 50.$$

$$P(A + B) = ?$$

Решение:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{15}{50} = \frac{3}{10} \\ P(B) &= \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \\ P(A + B) &= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ответ:  $P(A + B) = 0,5$





## ЗАДАЧА 3.

Прибор, работающий в течении времени  $t$ , состоит из 3 узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени  $t$  отказать (выйти из строя). Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время  $t$  вероятность безотказной работы 1 узла = 0,8, 2 узла = 0,9, 3 узла = 0,7. Найти надежность прибора в целом.

Дано:

$A$  - «Безотказная работа прибора»;

$A_1$  - «Безотказная работа 1 узла»,  $P(A_1) = 0,8$ ;

$A_2$  - «Безотказная работа 2 узла»,  $P(A_2) = 0,9$ ;

$A_3$  - «Безотказная работа 3 узла»,  $P(A_3) = 0,7$ .

$P(A) = ?$

Решение:

$$P[A] = P[A_1] \cdot P[A_2] \cdot P[A_3] = \\ = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$$

Ответ:  $P(A) = 0,504$ .



# ЗАДАЧА 4.

Вероятность попадания в мишень для 1 стрелка 0,85, а для 2 стрелка 0,8. Стрелки независимо друг от друга произвели по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок?

Дано:

А – «Попадание 1 стрелка»,  $P(A) = 0,85$ ;

В – «Попадание 2 стрелка»,  $P(B) = 0,8$ ;

С – «Попадание хотя бы одного стрелка»

$P(C) = ?$

Решение:

$$\begin{aligned} P[C] &= P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = \\ &= 0,85 + 0,8 - 0,85 \cdot 0,8 = \\ &= 0,97 \end{aligned}$$

Ответ:  $P(C) = 0,97$ .



# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



## **Блез Паскаль**

(19 июня 1623г. – 19 августа 1662г)

французский математик,  
физик, философ, один из  
основателей  
математического анализа,  
теории вероятностей и  
проектной геометрии

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## **Пьер де Ферма**

(17 августа 1601 — 12 января 1665)

французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе.





# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



**Христиан Гюйгенс**

(14 апреля 1629, Гаага —  
8 июля 1695, Гаага)

нидерландский механик,  
физик, математик, астроном и  
изобретатель. Один из  
основоположников теоретической  
механики и теории вероятностей.  
Первый иностранный член  
Лондонского королевского  
общества (1663), член Французской  
академии наук с момента её  
основания (1666) и её первый  
президент (1666—1681)

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## **Якоб Бернулли**

( 6 января 1655, Базель, —  
16 августа 1705, там же)

швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли, совместно с ним положил начало вариационному исчислению. Доказал частный случай закона больших чисел — теорему Бернулли. Профессор математики Базельского университета (с 1687 года) Иностранный член Парижской академии наук (1699) и Берлинской академии наук



# ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА И ИНТЕРНЕТ РЕСУРСЫ

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник – 2-е издание – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. 2005. – 552с. – (Профессиональное образование).
2. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. 2005. – 352с. – (Профессиональное образование).
3. [http://www.mathprofi.ru/teorija\\_verojatnostei.html](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)
4. [https://ru.wikipedia.org/wiki/История\\_теории\\_вероятностей](https://ru.wikipedia.org/wiki/История_теории_вероятностей)
5. [http://sernam.ru/book\\_tp.php?id=11](http://sernam.ru/book_tp.php?id=11)
6. [картинки теория вероятностей](#)

