

Лекция 8.

Тема: Сочетания.

Цель: Разобрать формулы для числа сочетаний с повтором и без повтора. Освоить их применение при решении задач.

Сочетания

- **Определение 1**

- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность попарно различных k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.
- Другими словами k -сочетание – это k -элементное подмножество n элементного множества.
- **Пример.** Дано множество $A = \{a; b; c\}$
Составим 2- сочетания: $\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$

Сочетания

- **Теорема 1**
- Число k - сочетаний n -элементного множества вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Доказательство.** Из каждого k -сочетания, переставляя его элементы всевозможными способами, получим $k!$ размещений. Значит,

$$k! \cdot C_n^k = A_n^k$$

- Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пример

- Сколькими способами можно выбрать 3 плитки шоколада из имеющихся 5 плиток?
- **Решение.** Задача сводится к вычислению числа сочетаний из 5 по 3

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Свойства сочетаний

$$1) C_n^0 = C_n^n = 1$$

Доказательство:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$2) C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

Доказательство:

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n$$

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

Свойства сочетаний

$$3) C_n^k = C_n^{n-k}$$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$4) C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

Доказательство:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Доказательство. Доказательство поведем индукцией по n .

1) Базис индукции. При $n=1$ бином Ньютона имеет вид

$$(a + b)^1 = C_1^0 a^{1-0} b^0 + C_1^1 a^{1-1} b^1.$$

Упростив выражение, получим верное равенство

$$a + b = a + b.$$

2) Индуктивное предположение. Допустим при $n=t$ выполняется равенство

$$(a + b)^t = \sum_{k=0}^t C_t^k a^{t-k} b^k$$

Бином Ньютона

- 3) Индуктивный переход. Докажем, что при $n=t+1$ выполняется равенство

$$(a+b)^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} C_{t+1}^k a^{t+1-k} b^k$$

- Для этого домножим в равенстве индуктивного предположения левую и правую части на

. Получим

$$(a+b)$$

$$(a+b)^t (a+b) = (a+b) \left(C_t^0 a^t + C_t^1 a^{t-1} b + \dots + C_t^{t-1} a b^{t-1} + C_t^t b^t \right)$$

Бином Ньютона

- Раскроем скобки в правой части равенства $(a + b)^{t+1} = (C_t^0 a^{t+1} + C_t^1 a^t b + \dots + C_t^{t-1} a^2 b^{t-1} + C_t^t ab^t) + (C_t^0 a^t b + C_t^1 a^{t-1} b^2 + \dots + C_t^{t-1} ab^t + C_t^t b^{t+1})$.

- Приведем подобные $(a + b)^{t+1} = C_t^0 a^{t+1} + (C_t^1 + C_t^0) a^t b + (C_t^2 + C_t^1) a^{t-1} b^2 + \dots + (C_t^{t-1} + C_t^{t-2}) a^2 b^{t-1} + (C_t^t + C_t^{t-1}) ab^t + C_t^t b^{t+1}$.

- Используем свойства числа сочетаний $(a + b)^{t+1} = C_{t+1}^0 a^{t+1} + C_{t+1}^1 a^t b + C_{t+1}^2 a^{t-1} b^2 + \dots + C_{t+1}^{t-1} a^2 b^{t-1} + C_{t+1}^t ab^t + C_{t+1}^{t+1} b^{t+1}$,

$$(a + b)^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} C_{t+1}^k a^{t+1-k} b^k$$

Следствия из бинома Ньютона

1) Равенство $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ получается из бинома Ньютона при $a = b = 1$.

2) Равенство $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$ получается из бинома Ньютона при $a = 1, b = -1$.

Сочетания с повторениями

Сочетание с повторениями

- **Определение 1**

- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.

- **Пример:** Дано множество $A = \{a; b; c\}$

Составим 2- сочетания с повторениями:

$[a; b]; [b; c]; [a; c]; [a; a]; [b; b]; [c; c]$

Число сочетаний с повторениями

- **Теорема 1.** Число k -сочетание с повторениями n – элементного множества вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

- **Доказательство.**
- **Лемма.** Количество упорядоченных наборов из 0 и 1 длины n , состоящих из k единиц равно C_n^k .

Доказательство Леммы. Упорядоченный набор из 0 и 1 однозначно определяется выбором мест для единиц. Число различных вариантов выбора k мест для единиц вычисляется по формуле C_n^k

Лемма доказана.

Число сочетаний с повторениями

- Строим k -сочетания с повторениями из элементов множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

В каждом таком наборе сначала расположим элементы типа a_1 , затем типа a_2 , и так далее. Каждому k -сочетанию с повторениями поставим в соответствие последовательность из 0 и 1 длины $n+k-1$, число единиц в этой последовательности равно k , число нулей $n-1$. Каждый 0 отделяет наборы различных типов. Каждое k -сочетание с повторениями однозначно определяет указанную последовательность и наоборот. По лемме таких последовательностей существует C_{n+k-1}^k . Значит,

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$



Пример

- В магазине продаются пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
- **Решение.** Используем формулу числа сочетаний с повторениями, так как покупка будет содержать пирожные повторяющихся сортов.

$$\bar{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120.$$

Сводная таблица

| | Порядок важен | Порядок не важен |
|----------------|---|----------------------------------|
| С повторениями | $\overline{A}_n^k = n^k$ | $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ |
| Без повторений | $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $A_n^n = P_n = n!$ | $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ |

Решение задач

Задачи

- 1) В почтовом отделении продают 5 видов интернет-карт. Сколькими способами можно купить в нем 3 различные карты? Сколькими способами можно купить 3 карты?

- **Решение.** Ответ на первый вопрос получим с помощью формулы числа сочетаний без повторений, так как карты различные

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

- На второй вопрос ответим, используя формулу числа сочетаний с повторениями, так как не сказано, что карты различных видов, значит виды карт могут повторяться

$$\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

Задачи

- 2) В классе 8 мальчиков и 9 девочек. Сколькими способами можно выбрать группу детей, состоящей из 4 мальчиков и 3 девочек?
- **Решение.** Четырех мальчиков выберем из 8, троих девочек – из 9. По правилу умножения получим

$$C_8^4 \cdot C_9^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{9!}{3!6!} = 70 \cdot 84 = 5880$$

Задачи

- 3) Используя бином Ньютона, раскрыть скобки $(a + b)^5$.
- **Решение.**

$$\begin{aligned}(a + b)^5 &= C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5 = \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Задачи

- 4) Сколькими способами можно раздать 6 одинаковых апельсинов между тремя детьми?
- **Решение.** Так как апельсины одинаковые, их вообще нельзя использовать в качестве 6 различных элементов множества.

Рассмотрим множество, состоящее из троих детей. Будем выбирать детей для апельсинов. Используем формулу числа сочетаний с повторениями, так как одному ребенку может достаться несколько апельсинов, а может не достаться ни одного.

$$\bar{C}_3^7 = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

Задачи

- 5) Сколькими способами можно распределить 5 одинаковых принтеров, 3 телефонных аппарата, 7 мониторов между 4 фирмами?
- **Решение.** Распределим сначала принтеры, затем телефонные аппараты, и, наконец, мониторы. Используя правило умножения, получим

$$\bar{C}_4^5 \cdot \bar{C}_4^3 \cdot \bar{C}_4^7 = C_8^5 \cdot C_6^3 \cdot C_{10}^7 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{10!}{7!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 56 \cdot 20 \cdot 120 = 134400$$

Задачи

- 6) Сколькими способами можно закодировать дверь, если она открывается при одновременном нажатии определенного количества различных цифр?
- Код может состоять из 1, или 2, или ..., или 10 цифр.

Для однозначного кода различных вариантов существует C_{10}^1 , для двузначного C_{10}^2 , ..., для десятизначного C_{10}^{10} .

По правилу сложения получим

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 2^{10} - 1 = 1023$$

Использовали следствие из бинома Ньютона.

k

- **Вопросы:**

- Сравнить выражения C_n^k и A_n^k

- Вычислить $C_n^{\frac{8}{2}}$