Кафедра математики и моделирования
Старшие преподаватели Е.Д. Емцева и Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 8.

Тема: Сочетания.

Цель: Разобрать формулы для числа сочетаний с повтором и без повтора. Освоить их применение при решении задач.

Сочетания

- **Определение 1**
- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность попарно различных k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.
- Другими словами k-сочетание – это k-элементное подмножество n элементного множества.
- **Пример**. Дано множество $A = \{a;b;c\}$

Составим 2- сочетания: $\{a;b\};\{a;c\};\{b;c\}$

Сочетания

- **Теорема 1**
- Число k- сочетаний n-элементного множества вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Доказательство.** Из каждого k-сочетания, переставляя его элементы всевозможными способами, получим k! размещений. Значит,

$$k! \cdot C_n^k = A_n^k$$

- Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пример

- Сколькими способами можно выбрать 3 плитки шоколада из имеющихся 5 плиток?
- **Решение.** Задача сводится к вычислению числа сочетаний из 5 по 3

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Свойства сочетаний

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

Доказательство:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Доказательство:

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n \qquad C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

Свойства сочетаний

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

4) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

Доказательство:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Доказательство. Доказательство поведем индукцией по n.

1) Базис индукции. При n=1 бином Ньютона имеет вид

$$(a+b)^1 = C_1^0 a^{1-0} b^0 + C_1^1 a^{1-1} b^1.$$

Упростив выражение, получим верное равенство

$$a+b=a+b.$$

2) Индуктивное предположение. Допустим при n=t выполняется равенство

$$(a+b)^t = \sum_{k=0}^{t} C_t^k a^{t-k} b^k$$

Бином Ньютона

- 3)Индуктивный переход. Докажем, что при n=t+1 выполняется равенство

$$(a+b)^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} C_{t+1}^{k} a^{t+1-k} b^{k}$$

- Для этого домножим в равенстве индуктивного предположения левую и правую части на
. Получим $(a+b)$

$$(a+b)^t (a+b) = (a+b)\left(C_t^0 a^t + C_t^1 a^{t-1} b + \ldots + C_t^{t-1} a b^{t-1} + C_t^t b^t\right)$$

Бином Ньютона

- Раскроем скобки в правой части равенства

$$(a+b)^{t+1} = \left(C_t^0 a^{t+1} + C_t^1 a^t b + \ldots + C_t^{t-1} a^2 b^{t-1} + C_t^t a b^t\right) +$$
$$+\left(C_t^0 a^t b + C_t^1 a^{t-1} b^2 + \ldots + C_t^{t-1} a b^t + C_t^t b^{t+1}\right).$$

- Приведем подобные

$$(a+b)^{t+1} = C_t^0 a^{t+1} + \left(C_t^1 + C_t^0\right) a^t b + \left(C_t^2 + C_t^1\right) a^{t-1} b^2 + \ldots +$$
$$+\left(C_t^{t-1} + C_t^{t-2}\right) a^2 b^{t-1} + \left(C_t^t + C_t^{t-1}\right) a b^t + C_t^t b^{t+1}.$$

- Используем свойства числа сочетаний

$$(a+b)^{t+1} = C_{t+1}^0 a^{t+1} + C_{t+1}^1 a^t b + C_{t+1}^2 a^{t-1} b^2 + \ldots +$$
$$+ C_{t+1}^{t-1} a^2 b^{t-1} + C_{t+1}^t a b^t + C_{t+1}^{t+1} b^{t+1},$$

$$(a+b)^{t+1} = \sum_{k=0}^{t+1} C_{t+1}^k a^{t+1-k} b^k$$

Следствия из бинома Ньютона

1)Равенство $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ получается из бинома Ньютона при

$a = b = 1.$

2) Равенство $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ получается из бинома Ньютона при

$a = 1, b = -1.$

Сочетания с повторениями

Сочетание с повторениями

- **Определение 1**
- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.

- **Пример:** Дано множество A= $\{a;b;c\}$.

Составим 2- сочетания с повторениями:

$$[a;b];[b;c];[a;c];[a;a];[b;b];[c;c]$$

Число сочетаний с повторениями

- **Теорема1.** Число k-сочетание с повторениями n – элементного множества вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

- **Доказательство.**
- **Лемма.** Количество упорядоченных наборов из 0 и 1 длины n, состоящих из k единиц равно C_n^k.

Доказательство Леммы. Упорядоченный набор из 0 и 1 однозначно определяется выбором мест для единиц. Число различных вариантов выбора k мест для единиц вычисляется по формуле C_n^k

Лемма доказана.

Число сочетаний с повторениями

- Строим k-сочетания с повторениями из элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

В каждом таком наборе сначала расположим элементы типа a_1 , затем типа a_2 ,и так далее. Каждому k-сочетанию с повторениями поставим в соответствие последовательность из 0 и 1 длины n+k-1, число единиц в этой последовательности равно k, число нулей n-1. Каждый 0 отделяет наборы различных типов. Каждое k-сочетание с повторениями однозначно определяет указанную последовательность и наоборот. По лемме таких последовательностей существует C_{n+k-1}^k. Значит,

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Пример

- В магазине продаются пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
- **Решение.** Используем формулу числа сочетаний с повторениями, так как покупка будет содержать пирожные повторяющихся сортов.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = 120.$$

Сводная таблица

	Порядок важен	Порядок не важен
С повторениями	$\overline{A}_n^k = n^k$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Без повторений	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $A_n^n = P_n = n!$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Решение задач

Задачи

- 1) В почтовом отделении продают 5 видов интернет-карт. Сколькими способами можно купить в нем 3 различные карты? Сколькими способами можно купить 3 карты?

- **Решение.** Ответ на первый вопрос получим с помощью формулы числа сочетаний без повторений, так как карты различные

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

- На второй вопрос ответим, используя формулу числа сочетаний с повторениями, так как не сказано, что карты различных видов, значит виды карт могут повторяться

$$\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

Задачи

- 2)В классе 8 мальчиков и 9 девочек. Сколькими способами можно выбрать группу детей, состоящей из 4 мальчиков и 3 девочек?
- **Решение.** Четырех мальчиков выберем из 8, троих девочек – из 9. По правилу умножения получим

$$C_8^4 \cdot C_9^3 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{9!}{3!6!} = 70 \cdot 84 = 5880$$

Задачи

- 3)Используя бином Ньютона, раскрыть скобки $(a+b)^5$.
- **Решение.**

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 b^0 + C_5^1 a^4 b^1 + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a^1 b^4 + C_5^5 a^0 b^5 =$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Задачи

- 4)Сколькими способами можно раздать 6 одинаковых апельсинов между тремя детьми?
- **Решение.** Так как апельсины одинаковые, их вообще нельзя использовать в качестве 6 различных элементов множества.

Рассмотрим множество, состоящее из троих детей. Будем выбирать детей для апельсинов. Используем формулу числа сочетаний с повторениями, так как одному ребенку может достаться несколько апельсинов, а может не достаться ни одного.

$$\overline{C}_3^7 = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = \frac{9!}{7!2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

Задачи

- 5) Сколькими способами можно распределить 5 одинаковых принтеров, 3 телефонных аппарата, 7 мониторов между 4 фирмами?
- **Решение.** Распределим сначала принтеры, затем телефонные аппараты, и, наконец, мониторы. Используя правило умножения, получим

$$\overline{C}_4^5 \cdot \overline{C}_4^3 \cdot \overline{C}_4^7 = C_8^5 \cdot C_6^3 \cdot C_{10}^7 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{10!}{7!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 56 \cdot 20 \cdot 120 = 134400$$

Задачи

- 6) Сколькими способами можно закодировать дверь, если она открывается при одновременном нажатии определенного количества различных цифр?
- Код может состоять из 1, или 2, или …,или 10 цифр.

Для однозначного кода различных вариантов существует C_{10}^{1} , для двузначного C_{10}^{2}, …, для десятизначного C_{10}^{10}.

По правилу сложения получим

$$C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+C_{10}^{3}+C_{10}^{4}+C_{10}^{5}+C_{10}^{6}+C_{10}^{7}+C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}=2^{10}-1=1023$$

Использовали следствие из бинома Ньютона.

ВГУЭС

k

- **Вопросы:**
- Сравнить выражения C_n^k и A_n^k
- Вычислить C_8^2