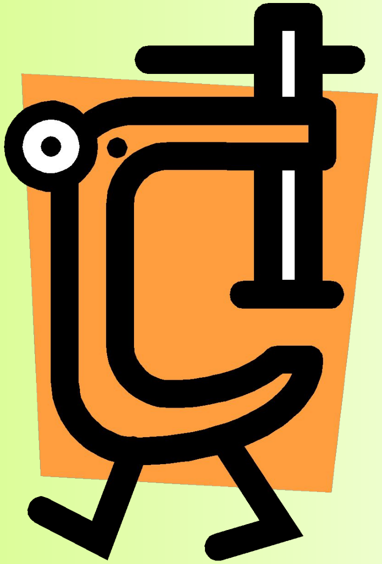
софизмы и парадоксы

Авторы:
Веялко Анастасия
Водопьянова Светлана

Содержание



Предисловие

- История математики полна неожиданных и интересных софизмов и парадоксов. И зачастую именно их разрешение служило толчком к новым открытиям, из которых, в свою очередь, вырастали новые софизмы и парадоксы.

Парадоксы

- Парадокс (от греческого para – против и doxa – мнение) – противоречивое высказывание. В математике парадокс – ситуация, когда в данной теории доказываются два взаимоисключающих суждения, причем каждое из этих суждений выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами, т. е. парадокс – высказывание, которое в данной теории равным образом может быть доказано и как истина, и как ложь.

Софизмы

Математический софизм –

Удивительное утверждение,

В доказательстве которого

Кроются незаметные, а подчас

И довольно тонкие ошибки.

Gardner M. Mathematical Puzzles and Diversions

Софизм (от греческого sofions – хитрая уловка, измышление) - логически неправильное рассуждение (вывод, доказательство), выдаваемое за правильное.

А теперь немного истории…

В Древней Греции «софисты» (от греческого слова sofos, означающего мудрость и являвшегося в то время синонимом слова sofions) – мыслители, люди, авторитетные в различных вопросах, в дальнейшем так стали называть преподавателей красноречия и всевозможных знаний, считавшихся необходимыми. Их задачей обычно было научить убедительно защитить любую точку зрения, какая только могла понадобиться ученику, при этом вполне допускались логические передержки, применение противоречивых норм, бытовавших у разных народов.

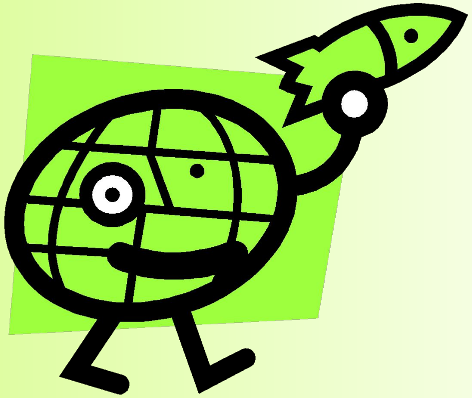
Задачи

- Парадоксы
- Софизмы

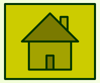
Парадоксы

- Задача№1
- Задача №2
- Задача №3
- Задача №4

Софизмы



- Софизмы
- Числовые софизмы
- Алгебраические софизмы



Дилемма крокодила

Крокодил украл ребенка; он обещал отцу вернуть ребенка, если отец угадает – вернет ему крокодил ребенка или нет. Что должен сделать крокодил, если отец скажет, что крокодил не вернет ему ребенка?

Ответ

Ответ

Этот парадокс носит название «парадокс кучи». В приведенном рассуждении второй приятель воспользовался методом полной математической индукции. Однако этот метод нельзя применять в подобных рассуждениях, ибо в них не определенно само понятие «куча песчинок».

Куча песка

Два приятеля однажды вели такой разговор.

- Видишь кучу песка? – спросил первый.
- Я то ее вижу, - ответил второй, - но ее нет на самом деле.
- Почему? – удивился первый.
- Очень просто, - ответил второй. – Давай рассудим: одна песчинка, очевидно, не образует кучи песка. Если n песчинок не куча, то n+1 тоже не куча. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучи, т.е. кучи песка нет.

Ответ

Деревенский парикмахер

- В деревне только один парикмахер, но он бреет тех жителей деревни, которые не бреются сами. Должен ли он брить самого себя? – задали вопрос мудрецу.
- Если он себя не бреет, то он относится к тем жителям, которых он должен брить. Значит он не должен себя брить. Вот и весь ответ на ваш вопрос, - ответил мудрец.
- Как же так, - продолжили спрашивать мудреца. – Если парикмахер себя не бреет, то должен брить, а если он себя не бреет, то не должен брить.

Что ответил мудрец история умалчивает.

Ответ

Ответ

Этот парадокс носит название «парадокс брадобрея». Парадокс свидетельствует о том, что такой парикмахер не может существовать; условие, которому должен удовлетворять деревенский парикмахер, является внутренне противоречивым и, следовательно, невыполнимым.

Земля и апельсин

Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным образом обтянут апельсин по его большому кругу. Далее вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 метр. Тогда, разумеется, обручи от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и образуют некоторый зазор. Спрашивается, в каком случае этот зазор будет больше – земного шара или апельсина?

Ответ

Ответ

Итак, у Земли и апельсина получится один и тот же зазор в ½ π метра, т.е. примерно 16 см. Столь «поразительный» результат есть следствие постоянства отношения длины любой окружности к ее радиусу.

Софизмы

№1 Древний софизм «Рогатый».

То, что ты не потерял, ты имеешь; ты не потерял рога, следовательно, ты их имеешь. **Ответ**

№2 Равен ли полный стакан пустому

Оказывается, что да. Действительно, проведем следующее рассуждение. Пусть имеется стакан, наполненный водой до половины. Тогда можно сказать, что стакан, наполовину полный равен стакану наполовину пустому. Увеличивая обе части равенства вдвое, получим, что стакан полный равен стакану пустому.

Верно ли приведенное суждение?

Ответ

Ответ

Ясно, что приведенное рассуждение неверно, так как в нем применяется неправомерное действие: увеличение вдвое. В данной ситуации его применение бессмысленно.

Числовые софизмы

№1 Дважды два – пять.

Напишем тождество 4:4=5:5. Вынеся из каждой части тождества общие множители за скобки, получаем: 4*(1:1)=5*(1:1) или (2*2)*(1*1)=5*(1:1). Так как 1:1=1,то 2*2=5. Где ошибка?

Ответ

№2 Четыре больше двенадцати

Прибавляя к обеим частям очевидного неравенства 7>5 число -8, имеем,

7-8>5-8, т.е. -1>-3. умножая теперь это неравенство на -4, получаем

(-1)*(-4)>(-3),т.е. 4>12.

Где ошибка?

Ответ

Ответ

При умножении верного равенства -1>-3 на отрицательное число (-4) получен неверный результат. Если мы умножаем обе части неравенства на одно и тоже отрицательное число, то знак неравенства надо изменить на противоположный, и тогда из неравенства -1>-3 следует верное неравенство 4<12.

№3 Пять равно шести

Возьмем тождество 35+10-45=42+12-54.

В каждой части этого тождества вынес за скобки общий множитель:

5*(7+2-9)=6*(7+2-9).

Теперь, получим, что 5=6. Где ошибка?

Ответ

Ответ

Ошибка допущена при делении верного равенства $5(7+2-9)=6(7+2-9)$ на число $7+2-9$, равное 0. Этого нельзя делать. Любое равенство можно делить только на число, отличное от 0.

Ответ

Ошибка сделана при вынесении общих множителей 4 из левой части и 5 из правой. Действительно, $4:4=1:1$, но $4:4\neq 4(1:1)$.

Алгебраические софизмы

- Задача №1
- Задача №2

Любое число равно 0

Пусть а – любое число. Рассмотрим уравнение $3x^2 - 3ax + a^2 = 0$. Перепишем его таким образом: $3x^2 - 3ax = -a^2$. Умножая обе его части на –а, получим уравнение $-3x^2a + 3a^2x = a^3$. Прибавляя к обеим частям этого уравнения $x^3 - a^3$, получаем уравнение $x^3 - 3ax^2 + 3a^2 x - a^3 = x^3$ или $(x-a)^3 = x^3$, откуда х-а=х, т.е. а=0. Где ошибка?

Ответ

Ответ

Все написанное можно интерпретировать так: если х – корень уравнения $3x^2 - 3ax + a^2 = 0$

то проведенные выкладки показывают, что уравнение имеет решение лишь при а=0.

Уравнение х-а=0 не имеет корней

Дано уравнение х-а=0. Разделив обе части этого уравнения на х-а, получим, что 1=0. Поскольку это равенство неверное, то это означает, что исходное уравнение не имеет корней. Где ошибка?

Ответ

Ответ

Поскольку $x=a$ – корень уравнения, то, разделив на выражение $x-a$ обе его части, мы потеряли этот корень и поэтому получили неверное равенство $1=0$.

Ответ

Крокодил попал в парадоксальную ситуацию. Действительно, если он не вернет ребенка, то отец угадал, а значит крокодил должен вернуть ребенка. Но если он вернет ребенка, то отец не угадал, а значит крокодил не должен возвращать ребенка. Итак, парадокс налицо: формально рассуждая, крокодил не может ни вернуть, ни оставить его у себя.

Ответ

№1. Ошибка здесь состоит в неправомерном переходе от общего правила к частному случаю, который этим правилом на предусмотрен. Действительно, начало первой фразы: «то, что ты не потерял…» подразумевает под словом «то» - все, что ты имеешь, и ясно, что в него не включены «рога». Поэтому заключение «ты имеешь рога» неправомерно.

Ответ

№2. Ошибка сделана при вынесении общих множителей 4 из левой части и 5 из правой части. Действительно, $4:4=1:1$, но $4:4 \neq 4(1:1)$.

Информационные ресурсы:

- *А.Г. Мадера, Д.А. Мадера* Математические софизмы.- Москва, 2003.
- *Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник, М.К. Потапов* Задачи на смекалку.- Москва, 2003.
- *Е.И. Игнатьев* Математическая смекалка.- Москва, 1994.