НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА
по математике:

СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Исполнитель: Лукин Николай Сергеевич
МОУ СОШ №21, г. Подольск

Научный руководитель: Буянова Анна Матвеевна
учитель математики МОУ СОШ №21, г. Подольск

2011 год

Цел

Рассмотреть решение квадратных, кубических и биквадратных уравнений;

Делимость многочленов;

Деление многочленов с остатком;

Решение алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени;

Симметрические и возвратные уравнения;

формулы Виета, Горнера и Безу.

Применить полученные знания при решении задач группы С, а именно С5.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ *называется квадратным уравнением,*
где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем, $a\neq0$.
Чтобы найти корни квадратного уравнения вида: $ax^2+bx+c=0$, *нужно найти его дискриминант.*
Дискриминант находится по формуле: $D=b^2-4ac$.

ЕСЛИ:

$D>0$, *то уравнение имеет два корня.*

$D=0$, *то уравнение имеет один корень.*

$D<0$, *то уравнение не имеет корней.*

ТЕОРЕМА ВИЕТА

Если числа m и n таковы, что сумма равна p, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $\underline{x^2+px+q=0.}$

Частные случаи при решении квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

$$1)\text{Если } a+b+c=0, \text{то } x_1=1,\ x_2=\frac{c}{a}$$

$$2)\text{Если } a+c=b, \text{то } x_1=-1,\ x_2=-\frac{c}{a}$$

Пример: $2x^2-3x+1=0,$ $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}$.

$2x^2+3x+1=0,$ $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.

БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнения вида $x^4+bx^2+c=0$ *будем называть биквадратными уравнениями.*

Первый способ:

Биквадратное уравнение можно заменой $y=x^2$ *свести к квадратному уравнению* $y^2+by+c=0$.

Пример. Решить уравнение $x^4-10x^2+1=0$.

Решение. Пусть $y=x^2$, $y^2-10y+1=0$, *тогда* $y_{1,2}=5\pm\sqrt{24}$.

Решив совокупность неполных квадратных уравнений $x^2=5+\sqrt{24}$ *и* $x^2=5-\sqrt{24}$, *получим ответ.*

Ответ: $x_{1,2,3,4,}=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{24}}$.

Можно действовать иначе.

Второй способ.

Разделим обе части уравнения на x^2. *Получим:*

$$x^2+\frac{1}{x^2}-10=0,\ x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-12=0,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=12, \text{ откуда } x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{12}.$$

Решим полученные уравнения::

$$1)\ x+\frac{1}{x}=\sqrt{12},\ x^2-\sqrt{12}x+1=0,\ x_{1,2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}.$$

$$2)\ x+\frac{1}{x}=-\sqrt{12},\ x^2+\sqrt{12}x+1=0,\ x_{3,4}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{2}.$$

СИММЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

Свойства симметрического уравнения

1)*Симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень* $x=-1$, *в чем можно убедиться непосредственной подстановкой*

2)*Уравнение четной степени* $2n$ *с помощью подстановки* $u=x+\frac{1}{x}$ *сводится к уравнению степени* n.

Пример симметрического уравнения

Решить уравнение :

$$\boxed{2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0}$$

Решение. Заметим, что $x=-1$ - *корень исходного уравнения. Пусть* $x\neq -1$. *Разделим левую часть уравнения на* $x+1$ *и получим симметрическое уравнение четвертой степени:*

$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0.$ *Разделим обе части уравнения на* x^2:

$2x^2+3x-16+3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}=0.$ *Сгруппируем члены уравнения:*

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$ *Пусть теперь* $t=x+\frac{1}{x}$,

тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, *и после преобразований получим квадратное уравнение:*

$2t^2+3t-20=0.$

Корни квадратного уравнения: $t_1=\frac{5}{2}$ *и* $t_2=-4$.

Таким образом, исходное уравнение четвертой степени равносильно совокупности уравнений $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$ *и* $x+\frac{1}{x}=-4$. *Решив уравнение, получим еще четыре корня исходного уравнения.*

Ответ: $-1,\ -2\pm\sqrt{3},\ 2,\ \frac{1}{2}$.

ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_nx^{n+1}+a_{n+1}x^n+\ldots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

называют возвратными уравнениями нечетной степени, если

$$\frac{a_{2n+1}}{a_0}=\lambda^{n+1},\ \frac{a_{2n}}{a_1}=\lambda^n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$$

где λ- некоторое действительное число.

Уравнения вида

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+\ldots+a_{2n-1}x+a_{2n}=0$$

называют возвратными уравнениями четной степени, если

$$\frac{a_{2n}}{a_0}=\lambda^n,\ \frac{a_{2n-1}}{a_1}=\lambda^{n-1},\ \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\lambda$$

Свойства возвратного уравнения

1)*Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x=-\lambda$ в чем можно убедиться подстановкой;*

2)*Уравнение четной степени 2n с помощью подстановки $u=x+\dfrac{\lambda}{x}$ сводится к уравнению степени n.*

ПРИМЕР ВОЗВРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Решить уравнение: $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$

Решение: Разделим обе части уравнения на x^2 *и сгруппируем члены уравнения:*

$$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0, 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$$

Обозначим $x + \frac{2}{x} = p$, *тогда* $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = p^2$ *и* $x^2 + \frac{4}{x^2} = p^2 - 4$

Получим уравнение $3\left(p^2 - 4\right) - 2p + 4 = 0$, *откуда* $3p^2 - 2p - 8 = 0$ *и* $p_1 = 2,\ p_2 = -\frac{4}{3}$

Уравнения $x + \frac{2}{x} = 2$ *и* $x + \frac{2}{x} = -\frac{4}{3}$ *корней не имеют, следовательно, исходное уравнение также не имеет корней.*

Ответ: корней нет.

ТЕОРЕМА I

Если x_0- корень уравнения $f(x)=0$,
где $f(x)$ - многочлен степени n, то $f(x) = (x\text{-}x_0)\cdot g(x)$,
причем $g(x)$ - многочлен степени n-1.

Доказательство. Покажем, что $f(x)$ можно представить в виде $(x\text{-}x_0)\cdot g(x)$.

Пусть $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n\text{-}1}x + a_n$ и x_0- корень уравнения $f(x) = 0$, тогда $f(x_0) = 0$, и

$$f(x)\text{-}f(x_0) = f(x) = a_0(x^n - x_0^n) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0).$$

Поскольку

$$x_n\text{-}x_0^n = (x\text{-}x_0)(x^{n\text{-}1} + x^{n\text{-}2}\cdot x_0 + \ldots + x\cdot x_0^{n\text{-}2} + x_0^{n\text{-}1}),$$

То в правой части равенства можно вынести за скобки выражение $x\text{-}x_0$,
а выражение в скобках - многочлен степени n-1.

ТЕОРЕМА II

Если x_0 - целый корень уравнения $f(x)=0$, где $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами, свободный член которого не равен 0, то x_0 - делитель свободного члена.

Доказательство. Пусть $f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *и* $f(x_0)=0$.

То есть $a_0x_0^n+\ldots+a_{n-1}x_0=-a_n$ *, откуда следует, что* $-(a_0x_0^{n-1}+\ldots+a_{n-1})x_0=a_n$ *, что означает, что* x_0 *- делитель* a_n .

Пример

Найдите целые корни уравнения $x^4-4x^3-2x^2+21x-18=0$

Делители свободного члена $:\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$.

при x = 1, $1^4-4\cdot1^3-2\cdot1^2+21\cdot1-18\neq0$;

при x = -1, $-1^4-4\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2+21\cdot(-1)-18\neq0$;

при x = 2, $2^4-4\cdot2^3-2\cdot2^2+21\cdot2-18=0$;

при x = -2, $-2^4-4\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)^2+21\cdot(-2)-18\neq0$;

при x = 3, $3^4-4\cdot3^3-2\cdot3^2+21\cdot3-18=0$;

при x = -3, $-3^4-4\cdot(-3)^3-2\cdot(-3)^2+21\cdot(-3)-18\neq0$;

при x = 6, $6^4-4\cdot6^3-2\cdot6^2+21\cdot6-18\neq0$;

при x = -6, $-6^4-4\cdot(-6)^3-2\cdot(-6)^2+21\cdot(-6)-18\neq0$;

при x = 9, $9^4-4\cdot9^3-2\cdot9^2+21\cdot9-18\neq0$;

при x = -9, $-9^4-4\cdot(-9)^3-2\cdot(-9)^2+21\cdot(-9)-18\neq0$;

при x = 18, $18^4-4\cdot18^3-2\cdot18^2+21\cdot18-18\neq0$;

при x = -18, $-18^4-4\cdot(-18)^3-2\cdot(-18)^2+21\cdot(-18)-18\neq0$;

ТЕОРЕМА III

Если x_0- корень уравнения $f(x)=0$,

где $f(x)$ - многочлен степени n,

то $f(x) = (x - x_0)\cdot g(x)$, причем $g(x)$ - многочлен степени n-1.

$$f(x):(x-x_0)=g(x)$$

И дальше находить корни многочлена $g(x)$.

Пример

Решить уравнение $\boxed{x^4-4x^3-2x^2+21x-18=0}$

Зная, что уравнение $x^4-4x^3-2x^2+21x-18=0$, имеет корни $x=2$ и $x=3$ я понизил степень многочлена делением уголком на x-2 и x-3.

$$\begin{array}{l|l}
x^4-4x^3-2x^2+21x-18=0 & x\text{-}2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-2x^3} & x^3\text{-}2x^2\text{-}6x+9 \\
\quad -2x^3-2x^2 & \\
\quad \underline{-2x^3+4x^2} & \\
\qquad -6x^2+21x & \\
\qquad \underline{-6x^2+12x} & \\
\qquad\qquad 9x-18 & \\
\qquad\qquad \underline{9x-18} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2-6x+9=0 & x\text{-}3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-3x^2} & x^2+x\text{-}3 \\
\quad x^2-6x & \\
\quad \underline{x^2-3x} & \\
\qquad -3x+9 & \\
\qquad \underline{-3x+9} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Решим квадратное уравнение $x^2+x-3=0$

D=13

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; 2; 3.

СХЕМА ГОРНЕРА

При делении многочлена n-й степени $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

на многочлен первой степени x-c удобен метод сокращенного деления(называемый схемой Горнера).

Он получается как следствие определения операции деления многочленов, из которого следует,

что при делении многочлена n-й степени на линейный многочлен x-c

в остатке может получиться либо многочлен нулевой степени

(т.е. отличное от нуля число), либо нуль, а степень частного равна n-1.

Пусть частное многочленов $P(x)$ *и* $x - c$ *имеет вид*

$$G(x) = \alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2}x + \alpha_{n-1}$$

а остаток $R(x)$ *равен числу* β *основании формулы* $P(x) = Q(x)\cdot G(x)$ *имеем*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x - c)(\alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2}x + \alpha_{n-1}) + \beta. \qquad (1)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в правой части равенства (1), из условия равенства многочленов получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов

$$\begin{aligned}
&\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \beta: \\
&\alpha_0 \quad = a_0, \\
&\alpha_1 \quad = a_1 + c\alpha_0, \\
&\alpha_2 \quad = a_2 + c\alpha_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_{n-1} = a_{n-1} + c\alpha_{n-2}, \\
&\beta \quad = a_n + c\alpha_{n-1}.
\end{aligned}$$

Эту таблицу называют схемой Горнера.

ТЕОРЕМА БЕЗУ

Первое уравнение системы дает значение $\alpha_0 = a_0$

Подставляя это значение во второе уравнение системы, получаем $\alpha_1 = a_1 + c\alpha_0$

Подставляя полученное значение α_1 *в третье уравнение системы, получаем значение* α_2 *и т.д. Последним будет найдено выражение для остатка* β

$$\beta = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \ldots + a_{n-1}c + a_n.$$

Это равенство известно под названием теоремы Безу.

Многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a$

при делении x-c дает остаток, равный значению этого многочлена при $x = c$.

Пример

Найдем корни многочлена $x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3 = 0$

Корнями могут быть -1;1;3;-3. *Чертим схему Горнера.*

	1	-1	-6	14	-11	3	
-1	1	-2	-4	18	-29	$\neq 0$	
1	1	0	-6	8	-3	0	$x_1=1$
1	1	1	-5	3	0		$x_2=1$
1	1	2	-3	0			$x_3=1$
1	1	3	0				$x_4=1$
1	1	$\neq 0$					
3	1	$\neq 0$					
-3	1	0					$x_5=-3$
-3	$\neq 0$						

1 - *корень кратности* 4.

Ответ: 1; -3.

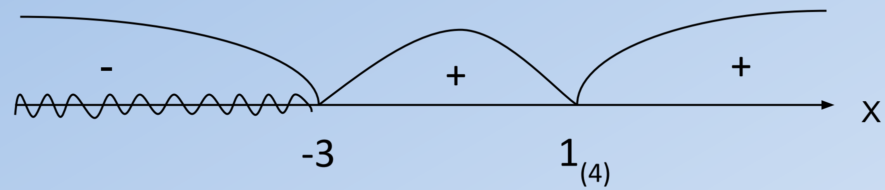
Теперь я могу разложить левую часть на множители.

Получается $(x-1)^4 \cdot (x+3)$

Зная, как находить корни многочлена, можно решать неравенства. Например, это

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3 \le 0$$

$$(x-1)^4 \cdot (x+3) \le 0$$



$$\text{Ответ}: (-\infty; -3] \cup \{1\}$$

	1	-7	17	-17	6	
1	1	-6	11	-6	0	$x_1=1$
1	1	-5	6	0		$x_2=1$
1	1	-4	≠0			
-1	1	-6	≠0			
2	1	-3	0			$x_3=2$
2	1	≠0				
-2	1	≠0				
3	1	0				$x_4=3$

Еще я научился составлять уравнения.

Например, я составил уравнение с корнями 1,1,2,3

и решил его по схеме Горнера.

$$(x-1)^2 \cdot (x-2)(x-3) = 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$$

Корнями могут быть -1;1;2;-2;3;-3;6;-6.

Ответ: 1;1;2;3.

ФОРМУЛЫ ВИЕТА

Если $x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$, *то* x_1 *и* x_2 *корни уравнения* $x^2+px+q=0$.

Оказывается между корнями $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *многочлена n-й степени*

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

со старшим коэффициентом,

равным единице (каждый корень взят такое число раз, какова его кратность),

существуют зависимости, называемые Формулами Виета:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{n-2} + c_n = -a_1 \\ c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n = a_2 \\ c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1c_2c_3 \ldots c_{n-1}c_n = (-1)^n a_n \end{cases}$$

Решение алгебраических уравнений 3-й степени с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение $\boxed{x^3 + ax^2 + bx + c = 0}$ (1)

Где a, b, c - действительные числа.

Введение подстановки $x = \left(y - \frac{a}{3}\right)$ *уравнение* (1) *сводиться к каноническому виду:*

$$y^3 + y\cdot\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + 2\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c = 0. \qquad (2)$$

Используя обозначения $p = b - \frac{a^2}{3}$, $q = 2\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$, *приводим уравнение* (2) *к виду:*

$$y^3 + py + q = 0. \qquad (3)$$

Введем новую подстановку $y = \left(z - \frac{p}{3z}\right)$. *Тогда уравнение* (3) *примет вид:*

$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\cdot\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0$. *Произведя преобразования, получим:*

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0, \text{ или } z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

Окончательно получаем уравнение

$$z^6 + qz^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0, \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет корни

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Отсюда

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} \qquad (5)$$

Следовательно,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}. \qquad (6)$$

Избавимся от иррациональности во втором члене выражения (6):

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Произведя преобразования, получим известную формулу Кардано:

$$\boxed{y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (7)}$$

Где $p = b - \frac{a^2}{3},\ q = 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c,\ y = \left(z - \frac{p}{3z}\right)$

Использование второго значения z, которое дает выражение (5) со знаком "минус", приводит к получению аналогичного выражения (7).

Решение алгебраических уравнений 4-й степени с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение $\boxed{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.}$ $\quad(8)$

Подстановкой $x = y - \dfrac{a}{4}$ *уравнение* (8) *приведем к виду:*

$$y^4 + py + qy + r = 0 \qquad (9)$$

Для того чтобы найти, чему равны коэффициенты p, q *и* r,

представим выражение в левой части уравнения (9) *в виде произведения двух квадратных трехчленов:*

$$y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 + \alpha y + \beta + \gamma)\cdot(y^2 - \alpha y + \beta - \gamma). \qquad (10)$$

Перемножив квадратные трехчлены и произведя преобразования, получим следующее уравнение:

$$y^4 + (2\beta - \alpha^2)y^2 - 2\alpha\gamma y + \beta^2 - \gamma^2 = 0. \qquad (11)$$

Уравнения (9) *и* (11) *тождественны, следовательно,*

коэффициенты при равных степенях неизвестного y *равны,*

что дает право составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha^2 = p \\ -2\alpha\gamma = q \\ \beta^2 - \gamma^2 = r \end{cases} \qquad (12)$$

Из первого уравнения системы выразим коэффициент β :

$$\beta = \frac{p+\alpha^2}{2}$$

Из второго уравнения выразим коэффициент γ

$$\gamma = -\frac{q}{2\alpha}.$$

Подставив полученные выражения для β *и* γ *уравнение системы, получим*

$$\left(\frac{p+\alpha^2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{q}{2\alpha}\right)^2 = r, \qquad \frac{p^2+2p\alpha^2+\alpha^4}{4} - \frac{q^2}{4\alpha^2} = r.$$

Произведя преобразования, приведем к уравнению

$$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + (p^2-4r)\alpha^2 - q^2 = 0,$$

Которое сводиться к кубическому подстановкой $\alpha^2 = t$:

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2-4r)t - q^2 = 0. \qquad (13)$$

Решив данное уравнение, найдем значения коэффициентов α β *и* γ :

$$\alpha = \pm\sqrt{t}, \quad \beta = \frac{p+t}{2}, \quad \gamma = -\frac{q}{2\sqrt{t}} \qquad (14)$$

Теперь возможно найти значения коэффициентов при степенях y в выражении (10):

$$\alpha = \pm\sqrt{t_1}, \quad \beta+\gamma = \frac{p+t_1-\dfrac{q}{\sqrt{t_1}}}{2}, \quad \beta-\gamma = \frac{p+t_1+\dfrac{q}{\sqrt{t_1}}}{2},$$

где t_1*- действительный положительный корень уравнения (13).*

Таким образом доказано, что уравнение (9)

может быть разложено на два квадрат ных уравнения :

$$\begin{cases} y^2+\sqrt{t_1}\cdot y+\dfrac{1}{2}\cdot\left(p+t_1-\dfrac{q}{\sqrt{t_1}}\right)=0 \\ y^2-\sqrt{t_1}\cdot y+\dfrac{1}{2}\cdot\left(p+t_1+\dfrac{q}{\sqrt{t_1}}\right)=0. \end{cases} \qquad (15)$$

Решение данной системы уравнений дает значения четырех корней уравнения (9).

Пример:

Решить уравнение

$$\boxed{y^4-27y^2+14y+120=0}$$

В данном уравнении $p=-27$, $q=14$, $r=120$. *Подставим значения* p, q *и* r *в уравнение* (13):

$$t^3+2(-27)t^2+((-27)^2-4\cdot 120)t-14^2=0.$$

Произведя преобразования, получим уравнение третьей степени:

$$t^3-54t^2+249t-196=0.$$

которое имеет корни $t_1=1,\quad t_2=4,\quad t_3=49.$

Подставив эти значения в систему (15), *получим три разложения исходного уравнения:*

$$\begin{cases} (y^2+y-20)\cdot(y^2-y-6)=0 \\ (y^2+2y-15)\cdot(y^2-2y-8)=0 \\ (y^2+7y+10)\cdot(y^2-7y+12)=0 \end{cases}$$

Решение каждой пары уравнений последней системы дает следующие корни:

$$y_1=4,\quad y_2=3,\quad y_3=-2,\quad y_4=-5.$$

Определить все значения a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3+(a^2-15a)x^2+12ax-216=0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Решение:

Пусть q- знаменатель геометрической прогрессии и x_1, x_2, x_3 – *корни кубического уравнения. Тогда корни связаны соотношением* $x_2=qx_1,\ \ x_3=q^2x_1$. *По теореме Виета*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1\cdot x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-(a^2-15a) \\ x_1\cdot x_2+x_1x_3+x_2x_3=12a \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=216 \end{cases}$$

Т.е. $x_1\cdot x_2\cdot x_3=216$, *то* $(qx_1)^3=216$, *т.е.* $x_2^3=216$,

$x_2=6$ *запишем т. Виета для* $x_1=\dfrac{x_2}{q}=\dfrac{6}{q}$, $x_2=6$, $x_3=x_2q=6q$

$$\begin{cases} 6(\dfrac{1}{q}+1+q)=-(a^2-15a) & (1) \\ 36(q+1+\dfrac{1}{q})=12a & (2) \\ x_2=6 & (3) \end{cases}$$

Ясно, что $a \neq o$ *т.к. иначе уравнение* $q+1+\frac{1}{q}=0$ *решений не имеет и следовательно,*

этот случай противоречит условию существования трех различных корней.

$$\text{Из (1) и (2) } 2a=15a\text{-}a^2,\ 15\text{-}a=2,\ a=13$$

$$\text{Из (2) } q+1+\frac{1}{q}=\frac{a}{3};$$

$$q+1+\frac{1}{q}=\frac{13}{3};$$

$$q^2-\frac{10}{6}q+1=0$$

$$D=\frac{100}{9}-4=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$q=\frac{1}{3},\ q=3$$

$$1)\ q=3,\ \text{тогда } x_1=2,\ x_2=6,\ x_3=18$$

$$2)\ q=\frac{1}{3},\ \text{тогда } x_1=18,\ x_2=6,\ x_3=2$$

Ответ: $a=13$, *корни* 2, 6, 18.

При каждом значении а решить неравенство $2ax^4+8x^3+(a+2a^3)x^2+4x+a^3>0$

Решение: Разложим на множители левую часть:

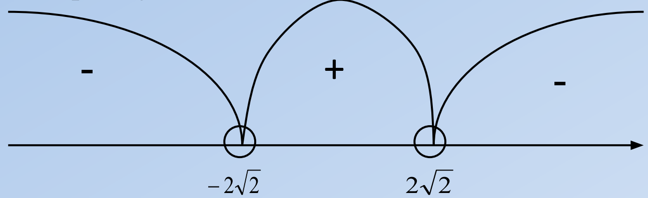
$2x^2(ax^2+4x+a^3)+(ax^2+4x+a^3)>0;\ (2x^2+1)\cdot(ax^2+4x+a^3)>0.$ *Т.к.* $2x^2+1>0$ *для любого* $x\in R$, *то* $ax^2+4x+a^3>0.$

$(x_a y_a)$ – *вершина параболы.* $D=16-4a^2=4(4-a^2)=4(2-a^2)(2+a^2).$

Пусть $a=0$, *тогда* $x>0$. *При* $a\neq 0$ *функция* $f(x)=ax^2+4x+a^3$

квадратный трехчлен, его график - парабола. Рассмотрим три случая в зависимости от знака

$D=16-4a^4=4(4-a^4)$ *при* $D>0$, $D=0$, $D<0$.



1) *Пусть* $D=4(4-a^4)<0.$

$4(2-a^2)(2+a^2)<0$

$(\sqrt{2}-a)(\sqrt{2}+a)<0$

$a\notin(-\infty;-\sqrt{2})(\sqrt{2};+\infty).$ *Тогда в зависимости от знака а функция f(x) , будет всюду положительно, либо всюду отрицательно.*

Для $a>0$, *точнее для* $a\notin(\sqrt{2};+\infty)$, *получаем* $f(x)>0$ *для* $x\in R.$

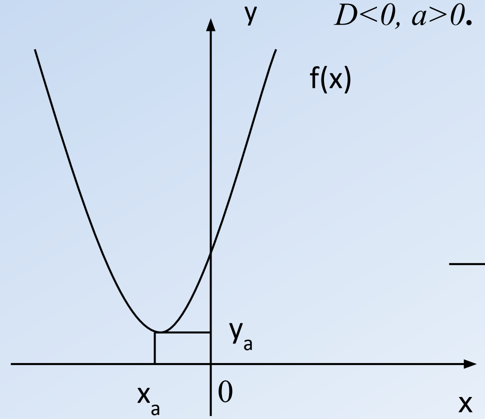
y

Для $a<0$ $f(x)<0$ *для* $x\in R.$

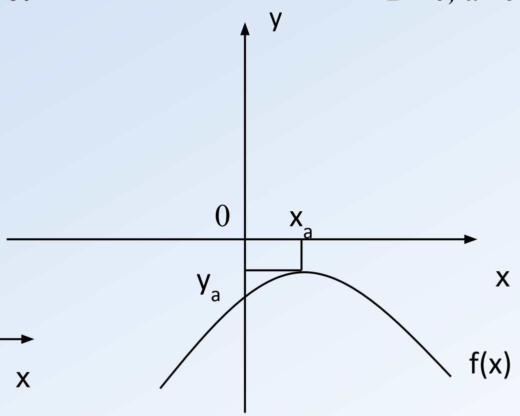
Частичный ответ: при $a\leq-\sqrt{2}$ – *решений нет;*

при $a>\sqrt{2}$, *то* $x\notin(-\infty;+\infty).$

D<0, a>0.



D<0, a<0.

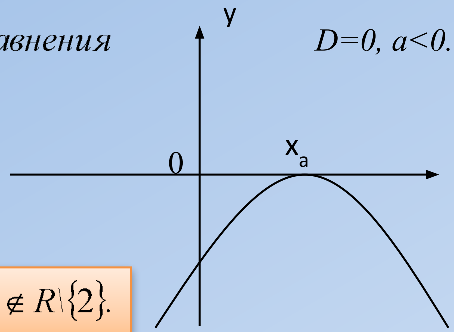


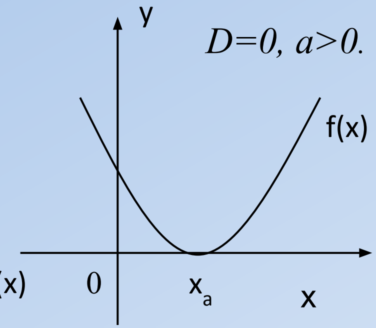
2) *Пусть* $D = 4(4 - a^4) = 0$, *т.е.* $a = \pm\sqrt{2}$. *Тогда у квадратного уравнения* $f(x) = 0$ *будет единственный корень.* $x_0 = -\dfrac{2}{a}$;

Для $a>0$ *получаем* $f(x) > 0$ *для любого* $x \in R \setminus \{-\sqrt{2}\}$.

Для $a < 0$ *получаем* $f(x) \le 0$ *для любого* $x \in R$.

Частичный ответ: при $a = -\sqrt{2}$ *– решений нет; при* $a = \sqrt{2}$, *то* $x \notin R \setminus \{2\}$.





3) Пусть $D = 4(4 - a^4) > 0$, *т.е.* $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Тогда у квадратного уравнения $f(x) = 0$ будет два решения :

$$x+ = \frac{-4 + 2\sqrt{(4 - a^4)}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a};\ x- = \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}.$$

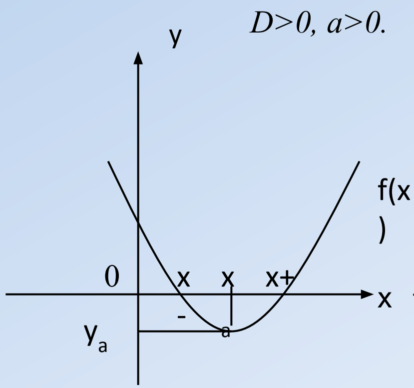
Для $a > 0$ *получаем* $f(x) > 0$ *для* $x \in (-\infty; x-) \cup (x+; +\infty)$.

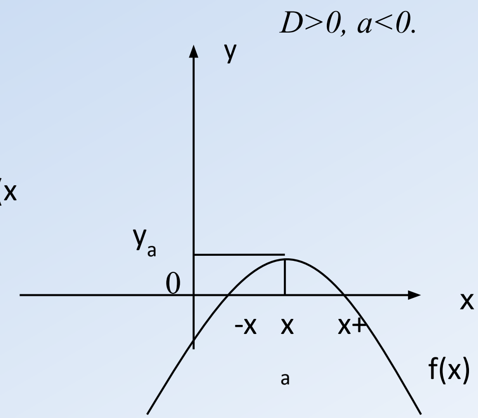
Для $a < 0$ *получаем* $f(x) > 0$ *для любого* $x \in (x+; x-)$.

Частичный ответ :

если $0 < a < \sqrt{2}$; то $x \in \left(-\infty; \dfrac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}; \dfrac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; +\infty\right)$

если $-\sqrt{2} < a < 0$; то $x \in \left(-\infty; \dfrac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; \dfrac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}\right)$





Объединим частичные ответы, получим ответ.

Ответ: При $a \le -\sqrt{2}$ *решений нет,*

при $-\sqrt{2} \le a < 0$, $x \in \left(\dfrac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{2};\ \dfrac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}\right)$; *при* $a = 0$; $x \in (0; +\infty)$; *при* $0 < a \le \sqrt{2}$, $x \in \left(-\infty; \dfrac{-2 - \sqrt{4 - a^2}}{a}\right) \cup \left(\dfrac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{2};\ +\infty\right)$;

при $a > \sqrt{2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

ВЫВОД:

***В своей работе я рассмотрел, изучил и опробовал на примере
одиннадцать способов решения уравнений .***

Упростил запись и ход решения схемы Горнера.

И я считаю, что нужно знать хотя бы самые простые способы решения уравнений высших степеней.

Применил полученные знания при решении задач группы С, а именно С5.