

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ  
РАБОТА  
по математике:

# СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

**Исполнитель:** Лукин Николай Сергеевич  
МОУ СОШ №21, г. Подольск

**Научный руководитель:** Буянова Анна  
Матвеевна

учитель математики МОУ СОШ №21, г.  
Подольск

2011

год

# Цел

*Рассмотреть решение квадратных, кубических и биквадратных уравнений;*

*Делимость многочленов;*

*Деление многочленов с остатком;*

*Решение алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени;*

*Симметрические и возвратные уравнения;*

*формулы Виета, Горнера и Безу.*

*Применить полученные знания при решении задач группы С, а именно С5.*

# КВАДРАТНОЕ

Уравнение вида  $ax^2+bx+c=0$  называется квадратным уравнением,

где  $x$  – переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  – некоторые числа, причем,  $a \neq 0$ .

Чтобы найти корни квадратного уравнения вида:  $ax^2+bx+c=0$ , нужно найти его дискриминант.

Дискриминант находится по формуле:  $D=b^2-4ac$ .

**ЕСЛ**

$D > 0$ , то уравнение имеет два корня.

**И:**

$D = 0$ , то уравнение имеет один корень.

$D < 0$ , то уравнение не имеет корней.

# ТЕОРЕМА

Если числа  $m$  и  $n$  таковы, что сумма равна  $p$ , а произведение равно  $q$ , то эти числа являются корнями уравнения  $x^2+px+q=0$ .

## Частные случаи при решении квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

1) Если  $a+b+c=0$ , то  $x_1=1$ ,  $x_2=-\frac{c}{a}$

2) Если  $a+c=b$ , то  $x_1=-1$ ,  $x_2=-\frac{c}{a}$

Пример:  $2x^2-3x+1=0$ ,

$$x_1=1, x_2=\frac{1}{2}.$$

$$2x^2+3x+1=0,$$

$$x_1=-1, x_2=-\frac{1}{2}.$$

# БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнения вида  $x^4+bx^2+c=0$  будем называть биквадратными уравнениями.

## Первый способ:

Биквадратное уравнение можно заменой  $y=x^2$  свести к квадратному уравнению  $y^2+by+c=0$ .

Пример. Решить уравнение  $x^4-10x^2+1=0$ .

Решение. Пусть  $y=x^2$ ,  $y^2-10y+1=0$ , тогда  $y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24}$ .

Решив совокупность неполных квадратных уравнений  $x^2=5+\sqrt{24}$  и  $x^2=5-\sqrt{24}$ , получим ответ.

Ответ:  $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{24}}$ .

Можно действовать иначе.

## Второй способ.

Разделим обе части уравнения на  $x^2$ . Получим:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 10 = 0, \quad x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 12 = 0, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 12, \quad \text{откуда } x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{12}.$$

Решим полученные уравнения::

$$1) \quad x + \frac{1}{x} = \sqrt{12}, \quad x^2 - \sqrt{12}x + 1 = 0, \quad x_{1,2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}.$$

$$2) \quad x + \frac{1}{x} = -\sqrt{12}, \quad x^2 + \sqrt{12}x + 1 = 0, \quad x_{3,4} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}.$$

# СИММЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

## Свойства симметрического уравнения

1) Симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень  $x = -1$ ,  
в чем можно убедиться непосредственной подстановкой

2) Уравнение четной степени  $2n$  с помощью подстановки  $u = x + \frac{1}{x}$   
сводится к уравнению степени  $n$ .

# Пример симметрического уравнения

Решить уравнение :

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$$

Решение. Заметим, что  $x = -1$  - корень исходного уравнения. Пусть  $x \neq -1$ .

Разделим левую часть уравнения на  $x+1$  и получим

симметрическое уравнение четвертой степени:

$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$ . Разделим обе части уравнения на  $x^2$ :

$2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$ . Сгруппируем члены уравнения:

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$ . Пусть теперь  $t = x + \frac{1}{x}$ ,

тогда  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ , и после преобразований

получим квадратное уравнение:

$$2t^2 + 3t - 20 = 0.$$

Корни квадратного уравнения:  $t_1 = \frac{5}{2}$  и  $t_2 = -4$ .

Таким образом, исходное уравнение четвертой степени равносильно совокупности уравнений

$x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$  и  $x + \frac{1}{x} = -4$ . Решив уравнение, получим еще четыре корня исходного уравнения.

Ответ:  $-1, -2 \pm \sqrt{3}, 2, \frac{1}{2}$ .

# ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_n x^{n+1} + a_{n+1} x^n + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

называют возвратными уравнениями нечетной степени, если

$$\frac{a_{2n+1}}{a_0} = \lambda^{n+1}, \frac{a_{2n}}{a_1} = \lambda^n, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

где  $\lambda$  - некоторое действительное число.

Уравнения вида

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

называют возвратными уравнениями четной степени, если

$$\frac{a_{2n}}{a_0} = \lambda^n, \frac{a_{2n-1}}{a_1} = \lambda^{n-1}, \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \lambda$$

## Свойства возвратного уравнения

1) Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень  $x = -\lambda$   
в чем можно убедиться подстановкой;

2) Уравнение четной степени  $2n$  с помощью

подстановки  $u = x + \frac{\lambda}{x}$  сводится к уравнению степени  $n$ .



# ПРИМЕР ВОЗВРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Решить уравнение:

$$3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$$

Решение: Разделим обе части уравнения на  $x^2$  и сгруппируем члены уравнения:

$$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0, 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$$

Обозначим  $x + \frac{2}{x} = p$ , тогда  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = p^2$  и  $x^2 + \frac{4}{x^2} = p^2 - 4$

Получим уравнение  $3(p^2 - 4) - 2p + 4 = 0$ , откуда  $3p^2 - 2p - 8 = 0$  и  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = -\frac{4}{3}$

Уравнения  $x + \frac{2}{x} = 2$  и  $x + \frac{2}{x} = -\frac{4}{3}$  корней не имеют, следовательно, исходное уравнение

также не имеет корней.

Ответ: корней нет.

# ТЕОРЕМА I

*Если  $x_0$  - корень уравнения  $f(x) = 0$ ,  
где  $f(x)$  - многочлен степени  $n$ , то  $f(x) = (x-x_0) \cdot g(x)$ ,  
причем  $g(x)$  - многочлен степени  $n-1$ .*

*Доказательство. Покажем, что  $f(x)$  можно представить в виде  $(x-x_0) \cdot g(x)$ .*

*Пусть  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$  и  $x_0$  - корень уравнения  $f(x) = 0$ , тогда  $f(x_0) = 0$ , и*

$$f(x) - f(x_0) = f(x) = a_0(x^n - x_0^n) + \dots + a_{n-1}(x - x_0).$$

*Поскольку*

$$x^n - x_0^n = (x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}),$$

*То в правой части равенства можно вынести за скобки выражение  $x-x_0$ ,*

*а выражение в скобка  $x$  - многочлен степени  $n-1$ .*

# ТЕОРЕМА II

Если  $x_0$  - целый корень уравнения  $f(x) = 0$ ,  
где  $f(x)$  - многочлен с целыми коэффициентами,  
свободный член которого не равен 0,  
то  $x_0$  - делитель свободного члена.

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$  и  $f(x_0) = 0$ .

То есть  $a_0x_0^n + \dots + a_{n-1}x_0 = -a_n$ , откуда следует, что  $-(a_0x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1})x_0 = a_n$ , что означает,  
что  $x_0$  - делитель  $a_n$ .

## Пример

Найдите целые корни уравнения

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0$$

Делители свободного члена :  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$ .

при  $x = 1, 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 - 18 \neq 0$ ;

при  $x = -1, -1^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 21 \cdot (-1) - 18 \neq 0$ ;

при  $x = 2, 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 - 18 = 0$ ;

при  $x = -2, -2^4 - 4 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 21 \cdot (-2) - 18 \neq 0$ ;

при  $x = 3, 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 21 \cdot 3 - 18 = 0$ ;

при  $x = -3, -3^4 - 4 \cdot (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 + 21 \cdot (-3) - 18 \neq 0$ ;

при  $x = 6, 6^4 - 4 \cdot 6^3 - 2 \cdot 6^2 + 21 \cdot 6 - 18 \neq 0$ ;

при  $x = -6, -6^4 - 4 \cdot (-6)^3 - 2 \cdot (-6)^2 + 21 \cdot (-6) - 18 \neq 0$ ;

при  $x = 9, 9^4 - 4 \cdot 9^3 - 2 \cdot 9^2 + 21 \cdot 9 - 18 \neq 0$ ;

при  $x = -9, -9^4 - 4 \cdot (-9)^3 - 2 \cdot (-9)^2 + 21 \cdot (-9) - 18 \neq 0$ ;

при  $x = 18, 18^4 - 4 \cdot 18^3 - 2 \cdot 18^2 + 21 \cdot 18 - 18 \neq 0$ ;

при  $x = -18, -18^4 - 4 \cdot (-18)^3 - 2 \cdot (-18)^2 + 21 \cdot (-18) - 18 \neq 0$ ;

Если  $x_0$  - корень уравнения  $f(x) = 0$ ,

где  $f(x)$  - многочлен степени  $n$ ,

то  $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ , причем  $g(x)$  - многочлен степени  $n-1$ .

$$f(x) : (x - x_0) = g(x)$$

И дальше находить корни многочлена  $g(x)$ .

## ТЕОРЕМА III

### Пример

Решить уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0$$

Зная, что уравнение  $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0$ , имеет корни  $x=2$  и  $x=3$

я понизил степень многочлена делением уголком на  $x-2$  и  $x-3$ .

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 21x - 18 = 0 & x-2 \\ \hline \underline{x^4 - 2x^3} & x^3 - 2x^2 - 6x + 9 \\ -2x^3 - 2x^2 & \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} & \\ -6x^2 + 21x & \\ \underline{-6x^2 + 12x} & \\ 9x - 18 & \\ \underline{9x - 18} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0 & x-3 \\ \hline \underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + x - 3 \\ x^2 - 6x & \\ \underline{x^2 - 3x} & \\ -3x + 9 & \\ \underline{-3x + 9} & \\ 0 & \end{array}$$

Решим квадратное уравнение  $x^2 + x - 3 = 0$

$$D=13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}; 2; 3.$$

# СХЕМА ГОРНЕРА

При делении многочлена  $n$ -й степени  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  на многочлен первой степени  $x-c$  удобен метод сокращенного деления (называемый схемой Горнера).

Он получается как следствие определения операции деления многочленов, из которого следует, что при делении многочлена  $n$ -й степени на линейный многочлен  $x-c$  в остатке может получиться либо многочлен нулевой степени (т.е. отличное от нуля число), либо нуль, а степень частного равна  $n-1$ .

Пусть частное многочленов  $P(x)$  и  $x-c$  имеет вид

$$G(x) = \alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2}x + \alpha_{n-1}$$

а остаток  $R(x)$  равен числу  $\beta$  основании формулы  $P(x) = Q(x) \cdot G(x)$  имеем

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x-c)(\alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2}x + \alpha_{n-1}) + \beta. \quad (1)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в правой части равенства (1), из условия равенства многочленов получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \beta:$$

$$\alpha_0 = a_0,$$

$$\alpha_1 = a_1 + c\alpha_0,$$

$$\alpha_2 = a_2 + c\alpha_1,$$

.....

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + c\alpha_{n-2},$$

$$\beta = a_n + c\alpha_{n-1}.$$

Эту таблицу называют схемой Горнера.

# ТЕОРЕМА БЕЗУ

Первое уравнение системы дает значение  $\alpha_0 = a_0$

Подставляя это значение во второе уравнение системы, получаем  $\alpha_1 = a_1 + c\alpha_0$

Подставляя полученное значение  $\alpha_1$  в третье уравнение системы, получаем значение  $\alpha_2$  и т.д. Последним будет найдено выражение для остатка  $\beta$

$$\beta = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \dots + a_{n-1}c + a_n.$$

Это равенство известно под названием теоремы Безу.

$$\text{Многочлен } a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a$$

при делении  $x-c$  дает остаток, равный значению этого многочлена при  $x = c$ .

## Пример

Найдем корни многочлена  $x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3 = 0$

Корнями могут быть  $-1; 1; 3; -3$ . Чертим схему Горнера.

	1	-1	-6	14	-11	3	
-1	1	-2	-4	18	-29	$\neq 0$	
1	1	0	-6	8	-3	0	$x_1=1$
1	1	1	-5	3	0		$x_2=1$
1	1	2	-3	0			$x_3=1$
1	1	3	0				$x_4=1$
1	1	$\neq 0$					
3	1	$\neq 0$					
-3	1	0					$x_5=-3$
-3	$\neq 0$						

1 - корень кратности 4.

Ответ: 1; -3.

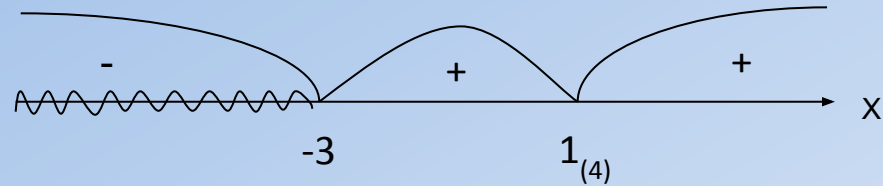
Теперь я могу разложить левую часть на множители.

$$\text{Получается } (x-1)^4 \cdot (x+3)$$

Зная, как находить корни многочлена, можно решать неравенства. Например, это

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3 \leq 0$$

$$(x-1)^4 \cdot (x+3) \leq 0$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -3] \cup \{1\}$$

	1	-7	17	-17	6	
1	1	-6	11	-6	0	$x_1=1$
1	1	-5	6	0		$x_2=1$
1	1	-4	$\neq 0$			
1	1	-6	$\neq 0$			
2	1	-3	0			$x_3=2$
2	1	$\neq 0$				
-2	1	$\neq 0$				
3	1	0				$x_4=3$

Еще я научился составлять уравнения.

Например, я составил уравнение с корнями 1,1,2,3

и решил его по схеме Горнера.

$$(x-1)^2 \cdot (x-2)(x-3) = 0$$

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$$

Корнями могут быть -1;1;2;-2;3;-3;6;-6.

Ответ: 1;1;2;3.

# ФОРМУЛЫ ВИЕТА

*Если  $x_1+x_2=-p$  ,  $x_1 \cdot x_2=q$ , то  $x_1$  и  $x_2$  корни уравнения  $x^2+px+q=0$ .*

*Оказывается между корнями  $c_1, c_2, \dots, c_n$  многочлена  $n$ -й степени*

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

*со старшим коэффициентом,*

*равным единице (каждый корень взят такое число раз, какова его кратность),*

*существуют зависимости, называемые Формулами Виета:*

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{n-2} + c_n = -a_1 \\ c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n = a_2 \\ c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \dots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -a_3 \\ \dots \dots \dots \\ c_1c_2c_3 \dots c_{n-1}c_n = (-1)^n a_n \end{array} \right.$$



# Решение алгебраических уравнений 3-й степени с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  (1)

Где  $a, b, c$  - действительные числа.

Введение подстановки  $x = \left(y - \frac{a}{3}\right)$  уравнение (1) сводится к каноническому виду:

$$y^3 + y \cdot \left(b - \frac{a^2}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c = 0. \quad (2)$$

Используя обозначения  $p = b - \frac{a^2}{3}$ ,  $q = 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$ , приводим уравнение (2) к виду:

$$y^3 + py + q = 0. \quad (3)$$

Введем новую подстановку  $y = \left(z - \frac{p}{3z}\right)$ . Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p \cdot \left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0. \text{ Произведя преобразования, получим:}$$

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0, \text{ или } z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

Окончательно получаем уравнение

$$z^6 + qz^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0, \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет корни

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Отсюда

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (5)$$

Следовательно,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}. \quad (6)$$

Избавимся от иррациональности во втором члене выражения (6):

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Произведя преобразования, получим известную формулу Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (7)$$

$$\text{Где } p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c, \quad y = \left(z - \frac{p}{3z}\right)$$

Использование второго значения  $z$ , которое дает выражение (5) со знаком "минус", приводит к получению аналогичного выражения (7).

# Решение алгебраических уравнений 4-й степени с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$  (8)

Подстановкой  $x = y - \frac{a}{4}$  уравнение (8) приведем к виду:

$$y^4 + py + qy + r = 0 \quad (9)$$

Для того чтобы найти, чему равны коэффициенты  $p$ ,  $q$  и  $r$ , представим выражение в левой части уравнения (9) в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 + \alpha y + \beta + \gamma) \cdot (y^2 - \alpha y + \beta - \gamma). \quad (10)$$

Перемножив квадратные трехчлены и проведя преобразования, получим следующее уравнение:

$$y^4 + (2\beta - \alpha^2)y^2 - 2\alpha\gamma y + \beta^2 - \gamma^2 = 0. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (11) тождественны, следовательно, коэффициенты при равных степенях неизвестного уравны, что дает право составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha^2 = p \\ -2\alpha\gamma = q \\ \beta^2 - \gamma^2 = r \end{cases} \quad (12)$$

Из первого уравнения системы выразим коэффициент  $\beta$  :

$$\beta = \frac{p + \alpha^2}{2}$$

Из второго уравнения выразим коэффициент  $\gamma$

$$\gamma = -\frac{q}{2\alpha}.$$

Подставив полученные выражения для  $\beta$  и  $\gamma$  уравнение системы, получим

$$\left(\frac{p + \alpha^2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{q}{2\alpha}\right)^2 = r, \quad \frac{p^2 + 2p\alpha^2 + \alpha^4}{4} - \frac{q^2}{4\alpha^2} = r.$$

Произведя преобразования, приведем к уравнению

$$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + (p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0,$$

Которое сводится к кубическому подстановкой  $\alpha^2 = t$ :

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0. \quad (13)$$

Решив данное уравнение, найдем значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\alpha = \pm\sqrt{t}, \quad \beta = \frac{p+t}{2}, \quad \gamma = -\frac{q}{2\sqrt{t}} \quad (14)$$

Теперь возможно найти значения коэффициентов при степенях  $u$  в выражении (10):

$$\alpha = \pm\sqrt{t_1}, \quad \beta + \gamma = \frac{p+t_1 - \frac{q}{\sqrt{t_1}}}{2}, \quad \beta - \gamma = \frac{p+t_1 + \frac{q}{\sqrt{t_1}}}{2},$$

где  $t_1$ - действительный положительный корень уравнения (13).

Таким образом доказано, что уравнение (9) может быть разложено на два квадрат ных уравнения :

$$\begin{cases} y^2 + \sqrt{t_1} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \left( p + t_1 - \frac{q}{\sqrt{t_1}} \right) = 0 \\ y^2 - \sqrt{t_1} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \left( p + t_1 + \frac{q}{\sqrt{t_1}} \right) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решение данной системы уравнений дает значения четырех корней уравнения (9).

**Пример:**

*Решить уравнение*

$$y^4 - 27y^2 + 14y + 120 = 0$$

В данном уравнении  $p = -27$ ,  $q = 14$ ,  $r = 120$ . Подставим значения  $p$ ,  $q$  и  $r$  в уравнение (13):

$$t^3 + 2(-27)t^2 + ((-27)^2 - 4 \cdot 120)t - 14^2 = 0.$$

*Произведя преобразования, получим уравнение третьей степени:*

$$t^3 - 54t^2 + 249t - 196 = 0.$$

*которое имеет корни  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 4$ ,  $t_3 = 49$ .*

*Подставив эти значения в систему (15), получим три разложения исходного уравнения:*

$$\begin{cases} (y^2 + y - 20) \cdot (y^2 - y - 6) = 0 \\ (y^2 + 2y - 15) \cdot (y^2 - 2y - 8) = 0 \\ (y^2 + 7y + 10) \cdot (y^2 - 7y + 12) = 0 \end{cases}$$

*Решение каждой пары уравнений последней системы дает следующие корни:*

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = -2, \quad y_4 = -5.$$

Определить все значения  $a$ , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 15a)x^2 + 12ax - 216 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Решение:

Пусть  $q$ - знаменатель геометрической прогрессии и  $x_1, x_2, x_3$  – корни кубического уравнения. Тогда корни связаны соотношением  $x_2 = qx_1$ ,  $x_3 = q^2x_1$ . По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -(a^2 - 15a) \\ x_1 \cdot x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12a \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 216 \end{cases}$$

Т.е.  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 216$ , то  $(qx_1)^3 = 216$ , т.е.  $x_1^3 = 216$ ,

$x_1 = 6$  запишем т. Виета для  $x_1 = \frac{x_2}{q} = \frac{6}{q}$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = x_2q = 6q$

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = -(a^2 - 15a) & (1) \\ 36\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) = 12a & (2) \\ x_2 = 6 & (3) \end{cases}$$

Ясно, что  $a \neq 0$  т.к. иначе уравнение  $q+1+\frac{1}{q}=0$  решений не имеет и следовательно,

этот случай противоречит условию существования трех различных корней.

$$\text{Из (1) и (2) } 2a=15a-a^2, 15-a=2, a=13$$

$$\text{Из (2) } q+1+\frac{1}{q}=\frac{a}{3};$$

$$q+1+\frac{1}{q}=\frac{13}{3};$$

$$q^2-\frac{10}{6}q+1=0$$

$$D=\frac{100}{9}-4=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$q=\frac{1}{3}, q=3$$

1)  $q=3$ , тогда  $x_1=2, x_2=6, x_3=18$

2)  $q=\frac{1}{3}$ , тогда  $x_1=18, x_2=6, x_3=2$

Ответ:  $a=13$ , корни 2, 6, 18.

$$2ax^4 + 8x^3 + (a + 2a^3)x^2 + 4x + a^3 > 0$$

При каждом значении  $a$  решить неравенство

Решение: Разложим на множители левую часть:

$2x^2(ax^2 + 4x + a^3) + (ax^2 + 4x + a^3) > 0$ ;  $(2x^2 + 1) \cdot (ax^2 + 4x + a^3) > 0$ . Т.к.  $2x^2 + 1 > 0$  для любого  $x \in R$ , то  $ax^2 + 4x + a^3 > 0$ .

$(x_a, y_a)$  – вершина параболы.  $D = 16 - 4a^2 = 4(4 - a^2) = 4(2 - a^2)(2 + a^2)$ .

Пусть  $a=0$ , тогда  $x > 0$ . При  $a \neq 0$  функция  $f(x) = ax^2 + 4x + a^3$

квадратный трехчлен, его график – парабола. Рассмотрим три случая в зависимости от знака

$D = 16 - 4a^2 = 4(4 - a^2)$  при  $D > 0$ ,  $D = 0$ ,  $D < 0$ .

1) Пусть  $D = 4(4 - a^2) < 0$ .

$$4(2 - a^2)(2 + a^2) < 0$$

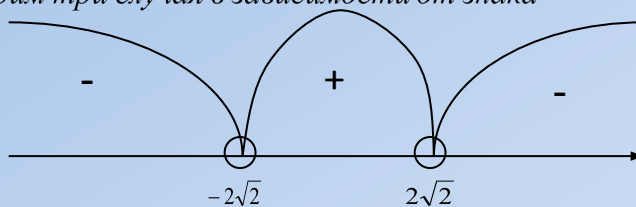
$$(\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a) < 0$$

$a \notin (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ . Тогда в зависимости от знака  $a$  функция  $f(x)$ , будет всюду положительно, либо всюду отрицательно.

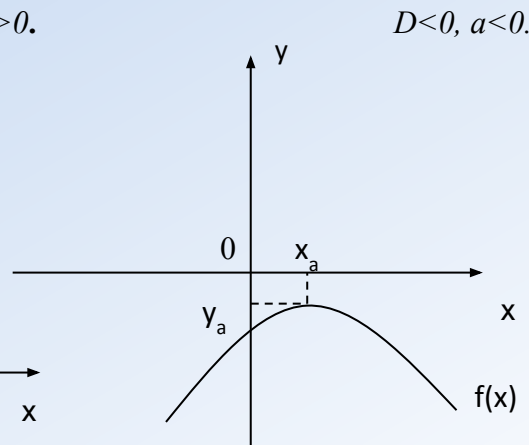
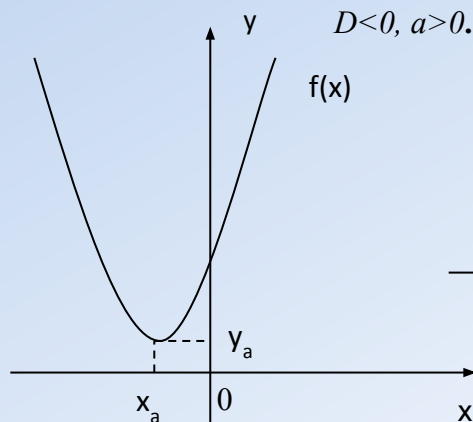
Для  $a > 0$ , точнее для  $a \notin (\sqrt{2}; +\infty)$ , получаем  $f(x) > 0$  для  $x \in R$ .

Для  $a < 0$   $f(x) < 0$  для  $x \in R$ .

Частичный ответ: при  $a \leq -\sqrt{2}$  – решений нет;  
при  $a > \sqrt{2}$ , то  $x \notin (-\infty; +\infty)$ .



y





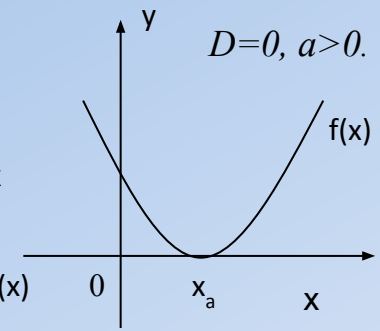
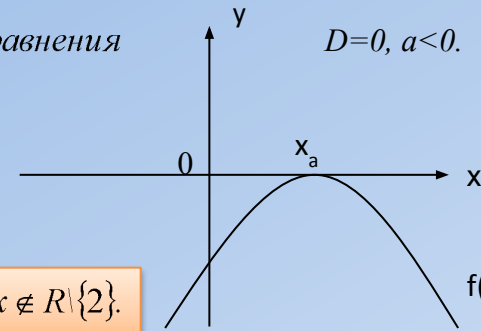
2) Пусть  $D = 4(4 - a^4) = 0$ , т.е.  $a = \pm\sqrt{2}$ . Тогда у квадратного уравнения

$f(x) = 0$  будет единственный корень.  $x_0 = -\frac{2}{a}$ ;

Для  $a > 0$  получаем  $f(x) > 0$  для любого  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\}$ .

Для  $a < 0$  получаем  $f(x) \leq 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ .

Частичный ответ: при  $a = -\sqrt{2}$  – решений нет; при  $a = \sqrt{2}$ , то  $x \notin \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .



3) Пусть  $D = 4(4 - a^4) > 0$ , т.е.  $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . Тогда у квадратного уравнения  $f(x) = 0$  будет два решения:

$$x_+ = \frac{-4 + 2\sqrt{4 - a^4}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; \quad x_- = \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}.$$

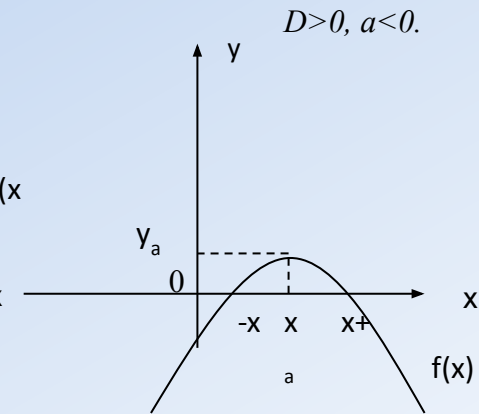
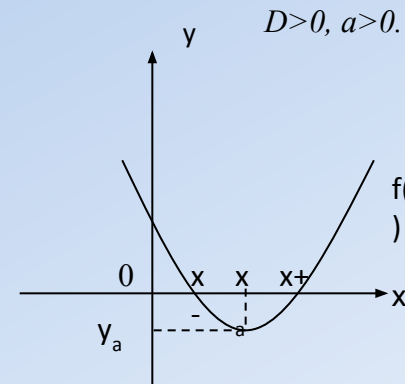
Для  $a > 0$  получаем  $f(x) > 0$  для  $x \in (-\infty; x_-) \cup (x_+; +\infty)$ .

Для  $a < 0$  получаем  $f(x) > 0$  для любого  $x \in (x_+; x_-)$ .

Частичный ответ:

если  $0 < a < \sqrt{2}$ ; то  $x \in \left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}; \frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; +\infty\right)$

если  $-\sqrt{2} < a < 0$ ; то  $x \in \left(-\infty; \frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{a}; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}; +\infty\right)$



Объединим частичные ответы, получим ответ.

Ответ: При  $a \leq -\sqrt{2}$  решений нет,

при  $-\sqrt{2} \leq a < 0$ ,  $x \in \left(\frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{2}; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}\right)$ ; при  $a = 0$ ;  $x \in (0; +\infty)$ ; при  $0 < a \leq \sqrt{2}$ ,  $x \in \left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{4 - a^4}}{a}\right) \cup \left(\frac{-2 + \sqrt{4 - a^4}}{2}; +\infty\right)$ ;

при  $a > \sqrt{2}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

# ВЫВОД:

*В своей работе я рассмотрел, изучил и опробовал на примере одиннадцать способов решения уравнений .*

*Упростил запись и ход решения схемы Горнера.*

*И я считаю, что нужно знать хотя бы самые простые способы решения уравнений высших степеней.*

*Применил полученные знания при решении задач группы С, а именно С5.*