Способы нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного натуральных чисел

Лекция №9

2 курс

Способы нахождения наибольшего общего делителя двух или нескольких натуральных чисел

- 1. Способ, основанный на каноническом представлении натурального числа.

- 2. Алгоритм Евклида.

- Нахождение наибольшего общего делителя через каноническое разложении чисел

- 1. Представить каждое число в каноническом виде.
- 2. Выбрать общие простые множители.
- 3. Составить произведение общих простых множителей.
- 4. Значение этого произведения равно наибольшему общему делителю.

- Например:
- Найти D (448;656)
- Представим каждое число в каноническом виде.
-

448	2
224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

656	2
328	2
164	2
82	2
41	41
1	

- Замечание:

- Если натуральные числа a и b представлены в каноническом виде, то каждый множитель в состав НОД (a,b) входит с наименьшим показателем.

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

Выберем общие множители и найдем их произведение.

D(448;656)= 2^4 =16

2) Древнегреческим математикам был известен факт:

- Наибольший общий делитель двух натуральных чисел a и b равен последнему, не равному нулю, остатку от деления числа a на b (если a>b) или b на a (если b>a).

- Это утверждение основано на трех умозаключениях

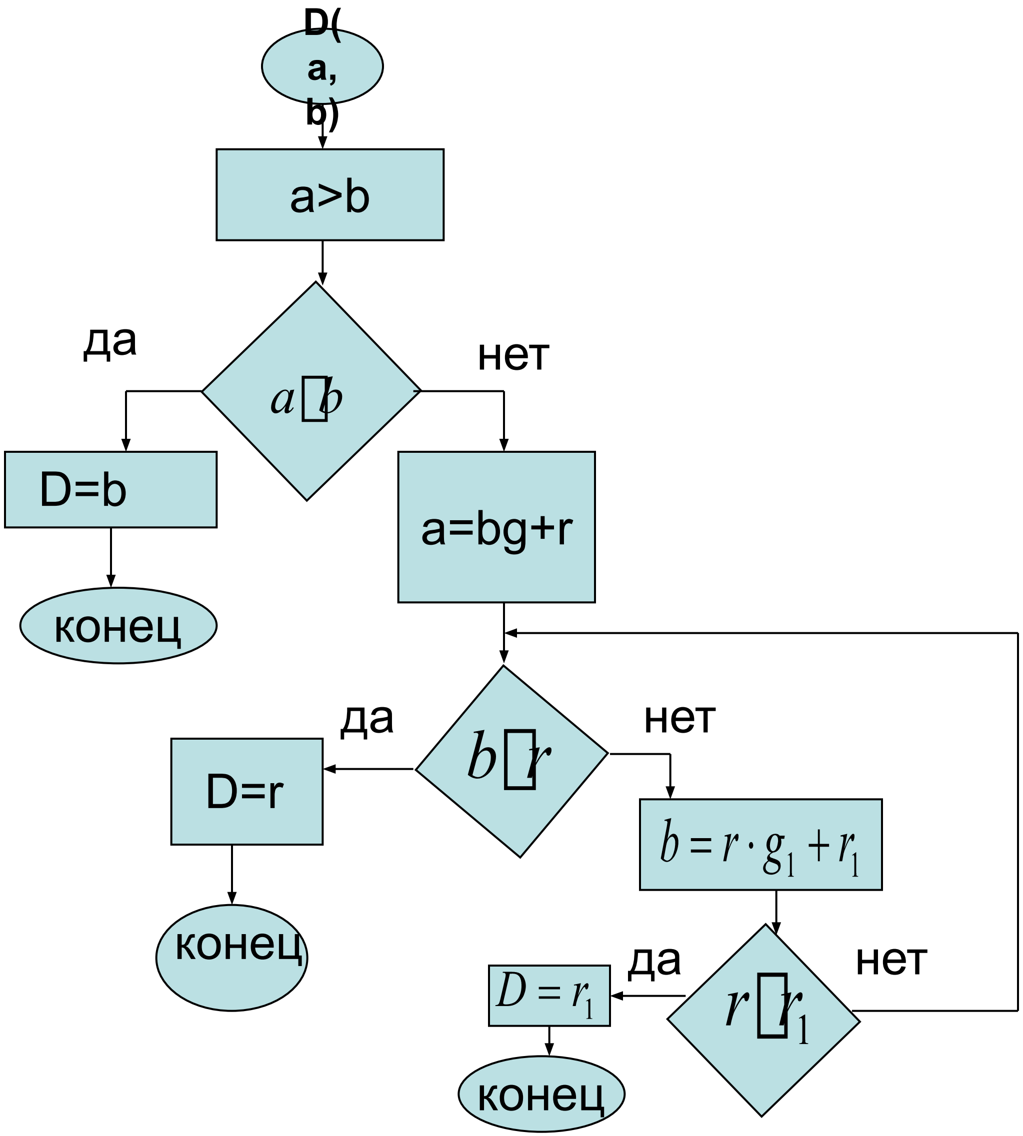
- 1.Если a делится на b, то D(a,b)=b.
- 2.Если a=bg+r, где a,b,r отличны от 0, то множество делителей a и b совпадает с множеством общих делителей b и r.
- 3. Если a=bg+r, где a,b,r отличны от 0, то D(a,b)=D(b,r).

- На основе этого утверждения Евклид сформулировал алгоритм вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

Алгоритм Евклида

- Пусть a>b
- 1.Если a делится на b, то D(a;b)=b.
- Если при делении a на b, получается остаток r, то D(a;b)=D(b;r)=r, если b кратно r.
- Если при делении b на r получается остаток r_1, то, D(a,b)=D(b,r)=D$(r\ ;r_1)$

Алгоритм Евклида



Например:

- Найти D (448;656)
- Разделим 656 на 448 с остатком.

$$\begin{array}{r|l} 656 & 448 \\ -\,448 & \overline{1} \\ \hline 208 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 448 & 208 \\ -\,416 & \overline{2} \\ \hline 32 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 208 & 32 \\ -\,192 & \overline{6} \\ \hline 16 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 16 \\ -\,32 & \overline{2} \\ \hline 0 & \end{array}$$

$656=448\cdot 1+\underline{208}$

$448=208\cdot 2+\underline{32}$

$208=32\cdot 6+\underline{16}$

$32=16\cdot 2+0$

Значит, D(448;656)= 16

Задача: Найти НОД (120,540, 418)

- НОД(a,b,c)=НОД(D(a,b),c)

Значит: 1. Найдем НОД(120,540)

- НОД (120,540)=60.

- 2. Найдем НОД(60,418)
- НОД(60,418)=2.

Способы нахождения наименьшего общего кратного двух или нескольких натуральных чисел

- 1. Способ, основанный на каноническом представлении натурального числа.

2. Способ, основанный на взаимосвязи между НОД(a,b) и НОК (a,b)

Нахождение наименьшего общего кратного через каноническое разложение чисел

- 1. Представить каждое число в каноническом виде.
- 2. Выбрать все простые множители.
- 3. Составить произведение всех простых множителей.
- 4. Значение этого произведения равно наименьшему общему кратному.

- Например:
- Найти К(448;656)
- Представим каждое число в каноническом виде.
- $$\begin{array}{r|l} 448 & 2 \\ 224 & 2 \\ 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

$$\begin{array}{r|r} 656 & 2 \\ 328 & 2 \\ 164 & 2 \\ 82 & 2 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

- Замечание:

- Если натуральные числа a и b представлены в каноническом виде, то каждый множитель в состав НОК (a,b) входит с наибольшим показателем.

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

Выберем все множители и найдем их произведение.

K(448;656)= $2^6 \cdot 7 \cdot 41 = 18368$

2) Способ образования НОК натуральных чисел

- $a \cdot b = D(a,b) \cdot K(a,b)$

- $K(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{D(a,b)}$

Например:

- Найти К(448;656)

К(a,b)= $\dfrac{656\cdot448}{16}=\dfrac{164\cdot112}{1}=18368$

- Задача: найдите НОК (12,48,54).
- Решение:

Так как 48 кратно 12, то НОК (12,48,54)=

=НОК (48,54); НОД(48,54)=6

НОК(48,54)= $\dfrac{48 \cdot 54}{6} = 8 \cdot 54 = 432$

Спасибо за внимание