

Способы решения тригонометрических уравнений

Алгебра 10 класс

Учитель: Коломиец Валентина Васильевна

Докучаевская сш

Тимирязевского района, СКО



Цель урока

Изучение способов решения тригонометрических уравнений

Задачи урока:

Образовательная:

Изучить способы решения тригонометрических уравнений.

Организовать работу учащихся на уровне, соответствующем уровню сформированных знаний и умений.

Развивающая:

Развивать потребность в нахождении рациональных способов решения тригонометрических уравнений.

Воспитательная:

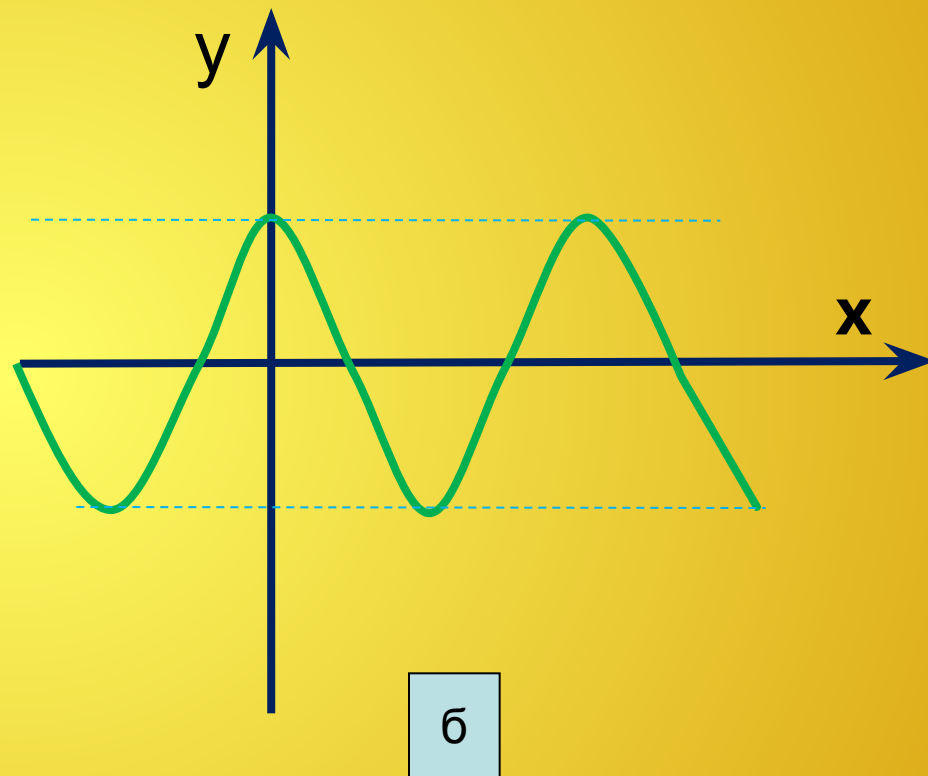
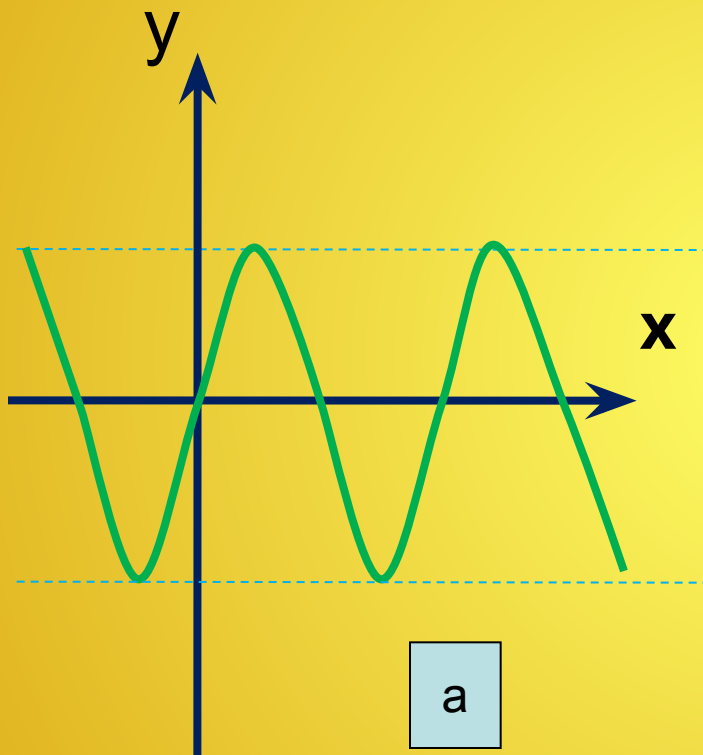
Способствовать развитию познавательного интереса учащихся к предмету, воздействуя на интерес старшеклассников к самопознанию.

«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»

Д. Пойа

- *Желаю работать , желаю трудиться*
- *Желаю успехов сегодня добиться*
- *Ведь в будущем все это вам пригодится.*
- *И легче в дальнейшем вам будет учиться*

График какой функции изображен на рисунке:



Назовите: 1) область определения функции, 2) множество значений функции; 3) наименьший положительный период.

Общие формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $\sin x = a$ | а) $x = \pm \arccos a + 2\pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |
| 2) $\cos x = a$ | б) $x = \arccos a + \pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |
| 3) $\operatorname{tg} x = a,$ | в) $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |
| 4) $\operatorname{ctg} x = a,$ | г) $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$
$n \in \mathbb{Z}$ |

Поставьте в соответствие формулы уравнений и их решений.

Установите съответствие:

1 $\sin x = 0$
 2 $\cos x = -1$
 3 $\sin x = 1$
 4 $\cos x = 1$
 5 $\sin x = 0$
 6 $\sin x = -1$
 7 $\cos x = 0$

$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
 $2\pi k, k \in Z$
 $\pi k, k \in Z$
 $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
 $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$
 $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
 $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

The diagram shows the following connections with red arrows:

- Equation 1 ($\sin x = 0$) connects to $\pi k, k \in Z$.
- Equation 2 ($\cos x = -1$) connects to $2\pi k, k \in Z$.
- Equation 3 ($\sin x = 1$) connects to $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
- Equation 4 ($\cos x = 1$) connects to $2\pi k, k \in Z$.
- Equation 5 ($\sin x = 0$) connects to $\pi k, k \in Z$.
- Equation 6 ($\sin x = -1$) connects to $\frac{3\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
- Equation 7 ($\cos x = 0$) connects to $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

*Реши простейшее
тригонометрическое уравнение*

Уровень А

$$2 \cos x = \sqrt{3}$$

Уровень В

$$\sin 2x = -1$$

Уровень С

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ответы:

- 1) $\pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, \quad n \in Z$
- 2) $\pm \pi/6 + 2\pi n,$
- 3) $-\pi/4 + \pi n/2,$
- 4) $-\pi/4 + \pi n,$

Реши тригонометрическое уравнение

1 вариант

$$\sin^2 x + 5 \sin x - 6 = 0$$

2 вариант

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

взаимопроверка

проверка

1 вариант

$$\sin^2 x + 5 \sin x - 6 = 0$$

$$\sin x = t, \quad t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -6$$

$$\sin x = 1, \quad \sin x = -6 - \text{нет реш}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2 вариант

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = t, \quad t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

$$\cos x = 1, \quad \cos x = 2 - \text{нет реш}$$

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Изучение новой темы

Чтобы решить тригонометрическое уравнение, надо путем тождественных преобразований привести его к простейшему тригонометрическому уравнению.

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a$$

Способы решения тригонометрических уравнений

- 1. Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции*
- 2. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами*
- 3. Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения*
- 4. Решение однородных тригонометрических уравнений*
- 5. Тригонометрические уравнения, решаемые путем введения дополнительного аргумента*

1. Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции

Рассмотрим пример.

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \quad \sin x = t$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25, \quad t_1 = -2, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\sin x = -2, \quad \text{нет решений}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$$

Рассмотрим пример 2.

$$3 \cos 2x = 7 \cos x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$3(2 \cos^2 x - 1) = 7 \cos x$$

$$6 \cos^2 x - 3 - 7 \cos x = 0$$

$$6 \cos^2 x - 7 \cos x - 3 = 0, \quad \cos x = a$$

$$6a^2 - 7a - 3 = 0$$

$$D = 49 + 72 = 121 \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\cos x = \frac{3}{2}, \quad \text{нет решений}$$

$$\cos x = -\frac{1}{3}, \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразований тригонометрическими формулами

Рассмотрим пример 1.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0, \text{ сгруппируем слагаемые } (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$$

Применим формулу $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, получаем

$$2 \sin \frac{x + 3x}{2} \cdot \cos \frac{x - 3x}{2} + \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos(-x) + \sin 2x = 0, \quad \sin 2x \cdot (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \pi n, \quad x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

ОТВЕТ : $x = \frac{\pi}{2}n, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z$

3. Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени уравнения

Пример.

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

Используем формулы понижения степени $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

$$(\cos 2x + \cos 8x) + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 3x + 2 \cos 5x \cdot \cos x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot (\cos 3x + \cos x) = 0, \quad 2 \cos 5x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 5x = 0; \quad \cos 2x = 0; \quad \cos x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};$$

$$\text{общее решение : } x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, \quad n \in Z \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{5} \left(\frac{1}{2} + n \right), \quad n \in Z$$

4. Решение однородных тригонометрических уравнений

Опр. Тригонометрическое уравнение называется однородным, если показатели степени слагаемых равны.

Пример.

$$6 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$$

Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$6 \sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$, разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$,

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = a$$

$$5a^2 - 3a - 2 = 0, \quad D = 9 + 40 = 49, \quad a_1 = -0,4; \quad a_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} x = -0,4; \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$x_1 = -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\text{Ответ: } -\operatorname{arctg} 0,4 + \pi n, \quad \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$$

Применение знаний

- Решить №116(а)
- № 117(б)
- № 122(в)



Д/з

п. 10. стр 68-75 учить

№ 116(б,г),

№ 117(а,в), 122(б)



• **Если «да» — , если «нет» +**

- 1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, решением данного уравнения являются любые значения x .
- 2) $X = \pi/2 + 2\pi n$ корень уравнения $\cos x = 0$.
- 3) $\cos x = 1/2$, его серия корней $x = \pi/3 + 2\pi n$
- 4) Метод решения уравнения $2\cos^2 x + 3\cos x = 0$ разложение на множители.
- 5) $\sin x + \cos x = 1$ - однородное уравнение.
- 6) Математика – мой любимый предмет.

Итог урока

Что нового вы узнали на уроке?

Трудным ли показался вам учебный материал?

Что необходимо сделать, чтобы эта тема была усвоена вами?



- *«Считай несчастным тот день или тот час, в который ты не усвоил ничего нового и ничего не прибавил к своему образованию»*

Я. А. Каменский

Всем спасибо!