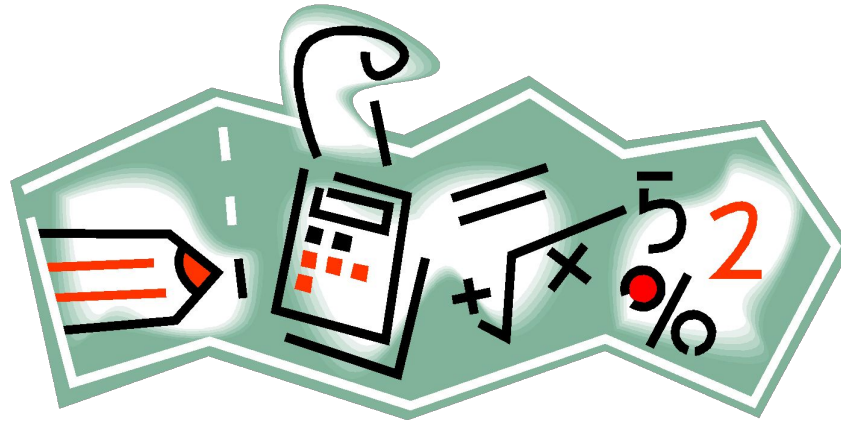


Способы вычисления неопределённого интеграла

Цель: отработать навыки вычисления
неопределённого интеграла различными способами.



Вопросы для повторения

Вопросы

- 1. Дать определение неопределённого интеграла.
- 2. Какие способы вычисления неопределённого интеграла вы знаете?

Ответы

- 1. **Совокупность** всех первообразных $F(x)+C$
- для функции $f(x)$.
- 2. **3 способа**: способ непосредственного интегрирования, способ замены, способ интегрирования по частям.

Вопросы для повторения

Вопросы

- 3. Что называется интегрированием?
- 4. Чем отличаются друг от друга различные первообразные для данной функции $f(x)$?

Ответы

- 3. Операция нахождения неопределённого интеграла от данной функции .
- 4. Постоянной C .

Вопросы для повторения

Вопросы

- 5. Какая функция называется первообразной для данной функции $f(x)$?

Ответы

- 5. **Функция $F(x)$** называется **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для всех x :
$$F'(x) = f(x)$$

1 вариант

- 1. Вычислить интеграл:

$$\int (2x^2 - 1)^2 dx$$

- 2. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int \sqrt[3]{(3x + 1)^2} dx$$

- 3. Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int x \cdot e^{-2x} dx$$

1 пример

$$\int (2x^2 - 1)^2 dx = \int (4x^4 - 4x^2 + 1) dx =$$

$$= \int 4x^4 dx - \int 4x^2 dx + \int dx =$$

$$= \frac{4x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x + C$$

2 пример

$$\int \sqrt[3]{(3x+1)^2} dx = \int t^2 \cdot t^2 dt = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^5}}{5} + C = \frac{(3x+1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{5} + C$$

$$3x+1 = t^3;$$

$$x = \frac{1}{3}(t^3 - 1);$$

$$dx = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt = t^2 dt$$

$$t = \sqrt[3]{(3x+1)}$$

3 пример

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$u = x \quad dv = e^{-2x} dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Дополнительное задание

$$\int e^{-x} \cdot \sin x dx$$

Решение

$$\int e^{-x} \cdot \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx =$$

$$u = e^{-x} \quad dv = \sin x dx$$

$$du = -e^{-x} \quad v = -\cos x$$

$$= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$u = e^{-x} \quad dv = \cos x dx$$

$$du = -e^{-x} dx \quad v = \sin x$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} (\cos x + \sin x)$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x)$$

$$\text{I. } \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C (\mu \neq -1).$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$\text{III. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\text{IV. } \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$$

$$\text{V. } \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$$

$$\text{VI. } \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C.$$

$$\text{VII. } \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C.$$

$$\text{VIII. } \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C.$$

$$\text{IX. } \int \frac{x dx}{x^2 + a} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + a| + C.$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$$

$$\text{XII. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$