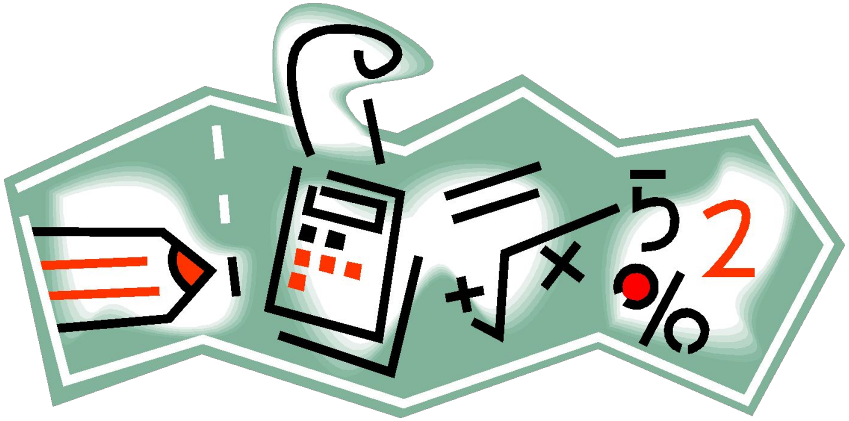
Способы вычисления неопределённого интеграла

Цель: отработать навыки вычисления неопределённого интеграла различными способами.



Вопросы для повторения

Вопросы

- 1. Дать определение неопределённого интеграла.
- 2. Какие способы вычисления неопределённого интеграла вы знаете?

Ответы

- 1. С**овокупность** всех первообразных **F(x)+C**
- для функции f(x).
- 2. **3 способа**: способ непосредственного интегрирования, способ замены, способ интегрирования по частям.

Вопросы для повторения

Вопросы

- 3. Что называется интегрированием?

- 4. Чем отличаются друг от друга различные первообразные для данной функции f(x)?

Ответы

- 3.Операция нахождения неопределённого интеграла от данной функции .
- 4. Постоянной **С**.

Вопросы для повторения

Вопросы	**Ответы**
• 5. Какая функция называется первообразной для данной функции f(x)?	• 5. **Функция F(x)** называется **первообразной** для функции f(x) на интервале (a;b), если для всех x: $F'(x) = f(x)$

1 вариант

- 1. Вычислить интеграл:

$$\int \left(2x^2 - 1\right)^2 dx$$

- 2. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int \sqrt[3]{\left(3x + 1\right)^2}\, dx$$

- 3. Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int x \cdot e^{-2x} dx$$

1 пример

$$\int \left(2x^2 - 1\right)^2 dx = \int \left(4x^4 - 4x^2 + 1\right) dx =$$

$$= \int 4x^4 dx - \int 4x^2 dx + \int dx =$$

$$= \frac{4x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x + C$$

2 пример

$$\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx = \int t^2 \cdot t^2 dt = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^5}}{5} + C = \frac{(3x+1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{5} + C$$

$$3x+1 = t^3;$$

$$x = \frac{1}{3}\left(t^3 - 1\right);$$

$$dx = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt = t^2 dt$$

$$t = \sqrt[3]{(3x+1)}$$

3 пример

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$u = x \qquad dv = e^{-2x} dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Дополнительное задание

$$\int e^{-x} \cdot \sin x dx$$

Решение

$$\int e^{-x}\cdot\sin x dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx =$$

$$u = e^{-x} \qquad dv = \sin x dx$$

$$du = -e^{-x} \qquad v = -\cos x$$

$$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x dx$$

$$u = e^{-x} \qquad dv = \cos x dx$$

$$du = -e^{-x}dx \qquad v = \sin x$$

$$\int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x dx$$

$$2\int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}\left(\cos x + \sin x\right)$$

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x + \sin x\right)$$

I. $\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C(\mu \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

III. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

IV. $\int e^{kx} dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + C$.

V. $\int \sin ax\, dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$.

VI. $\int \cos ax\, dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$.

VII. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 ax} = \dfrac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C$.

VIII. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 ax} = -\dfrac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C$.

IX. $\int \dfrac{x\,dx}{x^2 + a} = \dfrac{1}{2}\ln|x^2 + a| + C$.

X. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.

XI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

XII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

XIII. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right| + C$.