Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\frac{1}{\beta(x)}$ - бесконечно малая, в этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to x_0$.

Будем говорить, что $\alpha(x)$ имеет порядок k относительно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\alpha(x) \sim c\beta^k(x), \quad (c \in \mathbf{R}, c \neq 0).$$

Так величина $\alpha\,(x)$ имеет порядок k относительно $(x - x_0)$ при $x \to x_0$, если $\alpha\,(x) \sim c(x - x_0)^k$. При этом, если $\alpha\,(x)$ – бесконечно большая, то $k < 0$, если $\alpha\,(x)$ – бесконечно малая, то $k > 0$.

ПРИМЕРЫ СРАВНЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Пример 2. Определить порядок бесконечно малой величины $\alpha(x) = 2^{x^2-2x+2} - 2$ при $x \to 1$ относительно $(x-1)$.

Р е ш е н и е. $\alpha(x) = 2\left(2^{x^2-2x+1} - 1\right) = 2\left(2^{(x-1)^2} - 1\right) \sim 2(x-1)^2 \ln 2$ при $x \to 1$.
Следовательно, $\alpha(x)$ имеет второй порядок малости относительно $(x-1)$ при $x \to 1$.

Пример 3. Определить порядок функции $f(x) = \frac{\sin(x^3-8)}{x^4-8x^2+16}$ относительно $(x-2)$ при $x \to 2$.

Р е ш е н и е. Найдем функцию вида $c(x-2)^k$, эквивалентную функции $f(x)$ при $x \to 2$.

Так как $(x^3-8) \to 0$ при $x \to 2$, то

$$\sin(x^3-8) \sim (x^3-8) = (x-2)(x^2+2x+4).$$

Множитель $(x^2+2x+4) \to 12$ при $x \to 2$, следовательно,

$$\sin(x^3-8) \sim 12(x-2).$$

Трехчлен в знаменателе является полным квадратом разности $x^4-8x^2+16 = (x^2-4)^2$, которую по формуле разности квадратов преобразуем к произведению:

$$(x^2-4)^2 = (x-2)^2(x+2)^2.$$

Так как $(x+2) \to 4$ при $x \to 2$, то

$$x^4-8x^2+16 = (x-2)^2(x+2)^2 \sim 16(x-2)^2.$$

Таким образом, находим эквивалентную функцию:

$$\frac{\sin(x^3-8)}{x^4-8x^2+16} \sim \frac{12(x-2)}{16(x-2)^2} = \frac{3}{4}(x-2)^{-1}$$

так как степень $(x-2)$ отрицательна, делаем вывод, что $f(x)$ есть бесконечно большая функция относительно $\frac{1}{x-2}$ порядка 1.

Пример 4. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и при $x \to 1$. Определить порядок малости $f(x)$:

а) относительно x; б) относительно $(x-1)$.

Р е ш е н и е. а) Для определения порядка относительно x преобразуем разность, вынесем общий множитель за скобки:

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3} = x^{2/3} - x^{3/2} = x^{2/3}\left(1 - x^{5/6}\right) \sim x^{2/3} \cdot 1 = x^{2/3}.$$

Таким образом, при $x \to 0$ функция $f(x)$ имеет порядок $\frac{2}{3}$ относительно x.

б) Для исследования $f(x)$ при $x \to 1$ введём переменную $t = x - 1$, $t \to 0$, тогда $x = t + 1$ и:

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3} = (1+t)^{2/3} - (1+t)^{3/2} = \left((1+t)^{2/3} - 1\right) - \left((1+t)^{3/2} - 1\right).$$

Так как $(1+t)^{2/3} - 1 \sim \frac{2}{3}t$, а $(1+t)^{3/2} - 1 \sim \frac{3}{2}t$ при $t \to 0$, то

$$\left((1+t)^{2/3} - 1\right) - \left((1+t)^{3/2} - 1\right) \sim \frac{2}{3}t - \frac{3}{2}t = -\frac{5}{6}t = -\frac{5}{6}(x-1).$$

Следовательно, при $x \to 1$ функция $f(x)$ имеет первый порядок относительно $(x-1)$.

Пример 5. Определить порядок бесконечно большой функции $\beta(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 1$ относительно x при $x \to \infty$.

Р е ш е н и е. Так как при $x \to \infty$ многочлен эквивалентен своему старшему члену, то

$$3x^4 - 5x^2 + x - 1 \sim 3x^4,$$

следовательно, $\beta(x)$ – бесконечно большая порядка 4 относительно x.

Пример 6. Определить порядок бесконечно большой функции $\beta(x) = \operatorname{arctg}^2 x - \sqrt{x}$ относительно x при $x \to \infty$.

Р е ш е н и е. Функция $\operatorname{arctg} x$ является ограниченной:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} \quad \forall\, x \in \mathbf{R},$$

следовательно, $0 \leq \operatorname{arctg}^2 x < \frac{\pi}{2}$ и старшим слагаемым функции $\beta(x)$ является $-\sqrt{x}$.

Так как при $x \to \infty$

$$\operatorname{arctg}^2 x - \sqrt{x} \sim -\sqrt{x} = -x^{1/2},$$

то $\beta(x)$ – бесконечно большая порядка $\frac{1}{2}$ относительно x при $x \to \infty$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определить порядок функции $\beta(x) = \sqrt{9x^4 - 12x^3 + x^2}$ относительно x при $x \to \infty$. 2

1

Определить порядок функции $\beta(x) = \sqrt{9x^4 - 12x^3 + x^2}$ относительно x при $x \to 0$.

3

Определить порядок величины $\alpha(x) = \sin^2 x - x^3 + 1 - \cos x^2$ относительно x при $x \to \infty$.

2

Определить порядок величины $\alpha(x) = \sin^2 x - x^3 + 1 - \cos x^2$ относительно x при $x \to 0$. 3

Определить порядок величины $\alpha(x) = (1 - x)^4 - (1 + x)^4$ относительно x при $x \to \infty$.

1

Определить порядок величины $\alpha(x) = (1 - x)^4 - (1 + x)^4$ относительно x при $x \to 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для функции $f(x) = \sqrt{1-(x+1)^4} - 1$, бесконечно малой при $x \to -1$, найти порядок относительно $\Delta x = (x+1)$.

4

Определить порядок функции $f(x) = \operatorname{arctg} x^2 - x - 2x^4$ относительно x при $x \to 0$.

1

Определить порядок функции $f(x) = \sin\sqrt{x} + x - x^2\sqrt{x}$ относительно x при $x \to +0$.

1/2

Установить, какие функции являются бесконечно большими при $x \to \infty$.

- ☐ $F(x) = x \operatorname{tg} x$
- ☐ $F(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$
- ☐ $F(x) = \ln x - \ln \frac{x}{2}$
- ☐ $F(x) = x \sin x$
- ☐ $F(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Какие из следующих пар функций являются функциями одного порядка

- ☐ $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+9} - 3\right)$ и $g(x) = 2^{x^2} - 1$ при $x \to 0$
- ☐ $f(x) = 3\ln x$ и $g(x) = e^x - e$ при $x \to 1$
- ☐ $f(x) = 3\sin^2 x^2 - 5x^5$ и $1 - x^4 - \cos x^2$ при $x \to 0$
- ☐ $f(x) = \arcsin\left(e^{x^3} - 1\right)$ и $g(x) = \ln(1+3x)^3$ при $x \to 0$
- ☐ $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ и $g(x) = x^3 - x$ при $x \to 1$

Определить порядок малости относительно бесконечно малой x

при $x \to 0$ следующих функций

$2x - 3x^2 + x^3$

Выберите...

$\operatorname{tg} x - \sin x$

Выберите...

$\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$

Выберите...

$2\sin^3 x - x^2$

Выберите...

$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

Выберите...