# Средние величины

Средняя величина обобщает качественно однородные значения признака.

# Виды средних:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

<u>средняя арифметическая</u>

# взвешенная средняя арифметическая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{/} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

| Возраст | Число больных $f_i$ | Середина инт. $X_i^{/}$ | $X_i^{/} f_i$ |
|---|---|---|---|
| **17 - 20** | **48** | **18.5** | **888** |
| **20 - 30** | **120** | **25** | **3000** |
| **30 - 40** | **75** | **35** | **2625** |
| **40 - 50** | **62** | **45** | **2790** |
| **50 - 65** | **54** | **57.5** | **3105** |

**359**

**12408**

**X = 34.56 года**

# средняя квадратическая

$$x_{кв} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

# <u>средняя степенная</u>

$$\bar{x}_{ст} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}}$$

# средняя гармоническая

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

средняя геометрическая

$$\bar{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

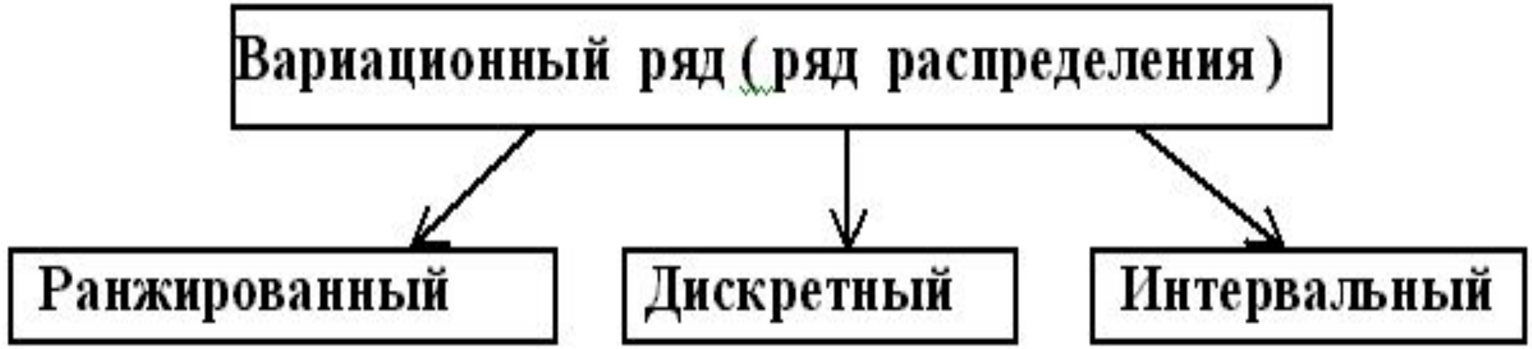
# *Правило мажорантности средних величин*:

$$\bar{x}_{\text{гарм}} \le \bar{x}_{\text{геом}} \le \bar{x}_{\text{ариф}} \le \bar{x}_{\text{кв}} \le \bar{x}_{\text{ст}}$$

# Вариации массовых явлений

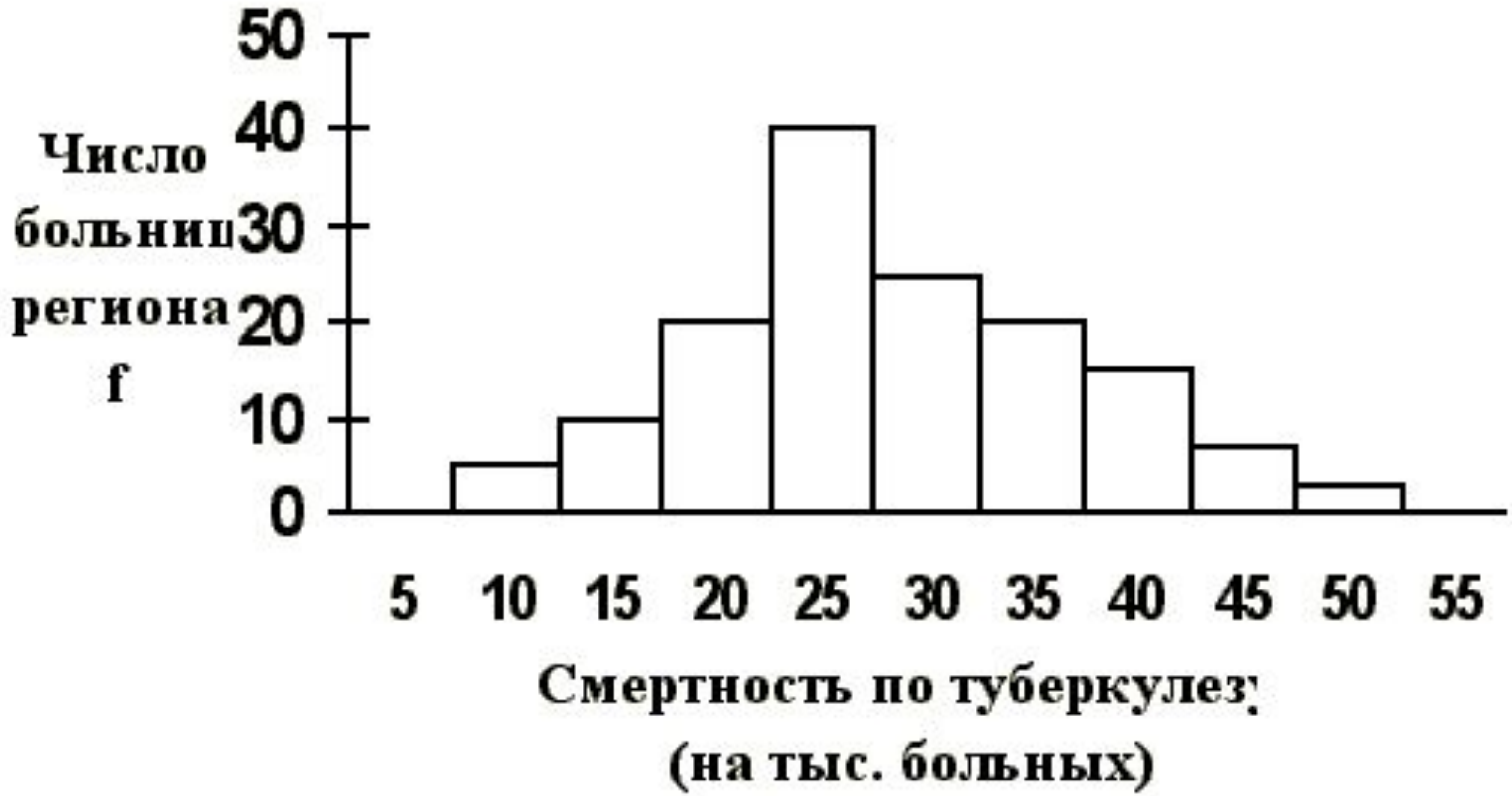
Вариацией значений какого - либо признака в совокупности называется различие его значений у разных единиц данной совокупности в один и тот же период или момент времени .

Вариационный ряд - упорядоченное распределение единиц совокупности по возрастающим / убывающим значениям признака и подсчет числа единиц с тем или иным признаком.


Вариационный ряд ( ряд распределения )
Ранжированный
Дискретный
Интервальный

| Наименование больницы | Число койко-дней в кардиологических отделениях больниц города |
|---|---|
| Больница N3 | **14.9** |
| Железнодорожная клиника | **16.0** |
| Больница N1 | **18.6** |
| Больница N2 | **25.2** |

| Число забитых мячей , $X_i$ | Число игр с таким кол - вом $X_i$ |
|---|---|
| 0 | 21 |
| 1 | 41 |
| 2 | 41 |
| 3 | 37 |
| 4 | 19 |
| 5 | 10 |
| 6 | 6 |
| 7 | 2 |


50
40
30
20
10
0
Число больниц региона f
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55
Смертность по туберкулез
(на тыс. больных)

# Как определить число требуемых интервалов в интервальном вариационном ряду?

**Формула Стержеса :**

$$\boldsymbol{k} = \textbf{integer}\left[1 + 3.32\lg(n)\right]$$

# тогда, ширина интервала:

$$\tau = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

# Структурные характеристики вариационного ряда

# <u>Медиана</u> распределения

Медиана - это численное значение признака у той единицы изучаемой совокупности, которая находится в середине ранжированного ряда. Медиана делит совокупность на две равные части. Первая половина единиц статистической совокупности (после ранжирования!) имеет значение варьирующего признака меньше, чем медиана, элементы из второй половины совокупности - больше.

Пример: группа из 7 студентов в возрасте от 17 до 23 лет сидят в аудитории за семью столами. Вариационный признак - возраст студента.

Первичные данные

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номер стола | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Возраст студента | 21 | 17 | 19 | 22 | 18 | 20 | 23 |

Строим ранжированный (по возрасту) вариационный ряд

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номер стола | 2 | 5 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 |
| Возраст студента | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |

Медиана равна 20 годам. Т.е. возраст четвертого (в ранжированном вариационном ряду) студента делит совокупность на две равные части. Трое студентов моложе его, трое - старше.

Если число единиц наблюдения (число элементов статистической совокупности) четное, то медианой считается средняя арифметическая из значений признака у двух серединных членов совокупности.

Рассмотрим абсолютно аналогичный пример, но для случая, когда наблюдается группа из 8 студентов.

Первичные данные

| Номер стола | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возраст студента | 21 | 17 | 19 | 22 | 18 | 20 | 23 | 20.5 |

Ранжированный вариационный ряд (по возрасту)

| Номер стола | 2 | 5 | 3 | 6 | 8 | 1 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возраст студента | 17 | 18 | 19 | 20 | 20.5 | 21 | 22 | 23 |

В этом случае медиана равна $\frac{[20 + 20.5]}{2} = 20.25$

# Определение медианы по интервальному ряду

Предположим, что первичные данные обработаны, и по ним построен интервальный вариационный ряд. Пример: статистическому наблюдению подвергаются больницы области. Число больниц - 143. Вариационный признак - число коек. Строится интервальный ряд:

| Группы больниц по числу коек $X_i$ | Число больниц $f_i$ | Середина Интервала $X_i'$ | $X_i' f_i$ | Накопленная частота $f_i'$ |
|---|---|---|---|---|
| 10-15 | 6 | 12,5 | 75 | 6 |
| 15-20 | 9 | 17,5 | 157,5 | 15 |
| 20-25 | 20 | 22,5 | 450 | 35 |
| ◆ 25-30 | 41 | 27,5 | 1127,5 | 76 |
| 30-35 | 26 | 32,5 | 845,5 | 102 |
| 35-40 | 21 | 37,5 | 787,5 | 123 |
| 40-45 | 14 | 42,5 | 595 | 137 |
| 45-50 | 5 | 47,5 | 237 | 142 |
| 50-55 | 1 | 52,5 | 52,5 | 143 |
| ИТОГО: | 143 | | 4327,5 | |

Предположим, что у нас нет в нашем распоряжении первичных данных. В этом случае мы не можем построить ранжированный вариационный ряд, как это было сделано в предыдущем примере.
В нашем распоряжении есть только обработанные до нас данные, которые уже сведены к интервальному ряду. Например, интервальный ряд (в виде гистограммы) был взят нами из периодической литературы.

Сами исходные данные не публиковались.

*Медиана* распределения вычисляется с использованием интервального ряда по формуле:

$$M_e = X_0 + \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i^{/}}{2} - f_{M_e-1}^{/}}{f_{M_e}} \cdot \tau$$

$X_o$ - низшая граница интервала, в котором находится медиана;

$f^{\prime}_{(Me\ -1)}$ - накопленная частота в интервале, предшествующем медианному; $f_{Me}$ - частота в медианном интервале; t - величина интервала;

k - число групп

Вычислим медиану по приведенной выше формуле:

1) 143/2~ 72 -> медиана находится в четвертом интервале (т.к. полученное число 72 ближе всего к 76 в столбце накопленных частот). Этот интервал отмечен значком ◆ в таблице.

2) в четвертом интервале: низшая граница $X_o$ =25, частота $f_{Me}$=41

3) в предшествующем (третьем) интервале накопленная частота равна $f'_{(Me-1)}$ = 35

4) ширина каждого интервала = 5 (см. первый столбец интервалов)

5) Окончательно, Me=25+[(72-35)/ 41]* 5 = 29.5 коек.

# Квартили распределения

Вычисляются абсолютно аналогично медиане по формулам:

$$Q_1 = x_0 + \frac{\left[\sum_{j=1}^{k} f_j^{/} / 4\right] - f_{(Q_1 - 1)}^{/}}{f_{Q_1}} \cdot \tau =$$

$$= 25 + \frac{(35.75 - 35)}{41} \cdot 5 = 25.09$$

$$Q_2 \equiv M_e$$

$$Q_3 = x_0 + \frac{\left[3\sum_{j=1}^{k} f_j^{/} / 4\right] - f_{(Q_3 - 1)}^{/}}{f_{Q_3}} \cdot \tau =$$

$$= 35 + \frac{(107.25 - 102)}{21} \cdot 5 = 36.25$$

Общее название для вышеприведенных структурных характеристик вариационного ряда - квантили. Если ряд делится на 4 части то в этом случае квантили называются квартилями (см. формулы выше), на 5 частей - квинтили ; на 10 - децили ; на 100 - перцентили .

# <u>Мода распределения</u> .

*Модальный интервал* - интервал с наибольшей частотой .

# *Мода:*

$$M_0 = X_0 + \frac{f_{M_0} - f_{(M_0-1)}}{\left[f_{M_0} - f_{(M_0-1)}\right] + \left[f_{M_0} - f_{(M_0+1)}\right]} \cdot \tau$$

по-прежнему, $x_0$ – нижняя граница модального интервала,

$f_{M_0}$ – частота в модальном интервале.

# Рассмотрим пример с обследованием 143 больниц.

| Группы больниц по числу коек $X_i$ | Число больниц $f_i$ | Середина Интервала $X_i'$ | $X_i' f_i$ | Накопленная частота $f_i'$ |
|---|---|---|---|---|
| 10-15 | 6 | 12,5 | 75 | 6 |
| 15-20 | 9 | 17,5 | 157,5 | 15 |
| 20-25 | 20 | 22,5 | 450 | 35 |
| 25-30 | 41 | 27,5 | 1127,5 | 76 |
| 30-35 | 26 | 32,5 | 845,5 | 102 |
| 35-40 | 21 | 37,5 | 787,5 | 123 |
| 40-45 | 14 | 42,5 | 595 | 137 |
| 45-50 | 5 | 47,5 | 237 | 142 |
| 50-55 | 1 | 52,5 | 52,5 | 143 |
| ИТОГО: | 143 | | 4327,5 | |

Модальный интервал - четвертый. Наибольшая частота (41) относится к этому интервалу. Т.е., в рассматриваемом примере модальный и медианный интервалы совпали. Это часто встречается, но так бывает не всегда!

Частоты в интервалах в предшествующем (число 20) и следующим (это число 26) за модальным интервалом отмечены в таблице бирюзовой заливкой.

Вычислим моду:

$$M_0 = 25 + \frac{(41-20)}{(41-20)+(41-26)} \cdot 5 = 27.9$$

$M_0 < M_e < \bar{x}$ для нормального распределения. 7.