

Статистическая гипотеза

- Любое утверждение о виде или свойствах закона распределения наблюдаемых случайных величин
- Всякий раз предполагаем, что у нас имеются две взаимоисключающие гипотезы:

основная и альтернативная

Нулевой (основной) гипотезой - H_0 называют какое-либо конкретное предположение о теоретической функции распределения или предположение, влекущее за собой важные практические последствия

Альтернативная гипотеза H_1 - любая гипотеза, исключая нулевую

Задача проверки статистической гипотезы состоит в том, чтобы, используя статистические данные (выборку)

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

принять или отклонить нулевую гипотезу

Нулевые и альтернативные гипотезы формулируются как утверждение о принадлежности функций распределения некоторой случайной величины определенному классу распределений

$$\Phi_0, \Phi_1 \in \Phi, \quad \Phi_0 \cup \Phi_1 = \Phi$$

$$\Phi_0 \cap \Phi_1 = \emptyset$$

$$H_0 : F_x \in \Phi_0; \quad H_1 : F_x \in \Phi_1$$

Гипотеза называется **простой**, если соответствующий класс распределений содержит лишь **одно** распределение, в противном случае гипотеза будет **сложной**.

Гипотезы о параметрах распределений называются **параметрическими**

Статистикой критерия

называется функция от выборки

$$T(X) \in \tau$$

значение которой для заданной
выборки служит основанием принятия
или отклонения основной гипотезы

Статистический критерий - правило,
позволяющее только по результатам
наблюдений

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

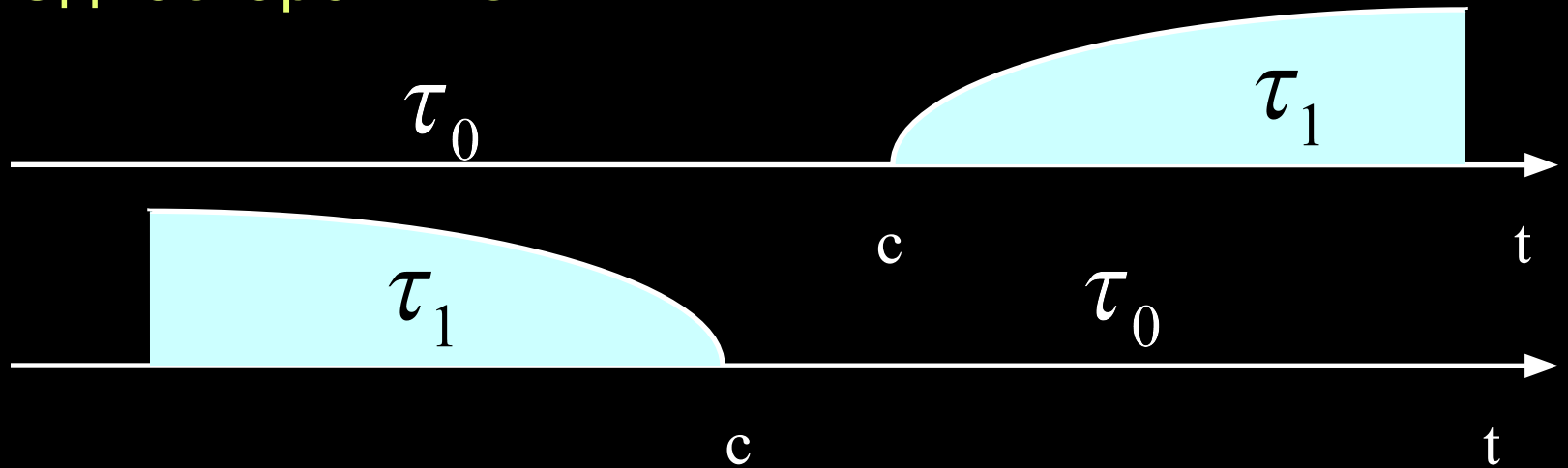
принять или отклонить нулевую
гипотезу H_0

Каждому критерию отвечает разбиение области значений *статистики критерия* на две непересекающихся части:

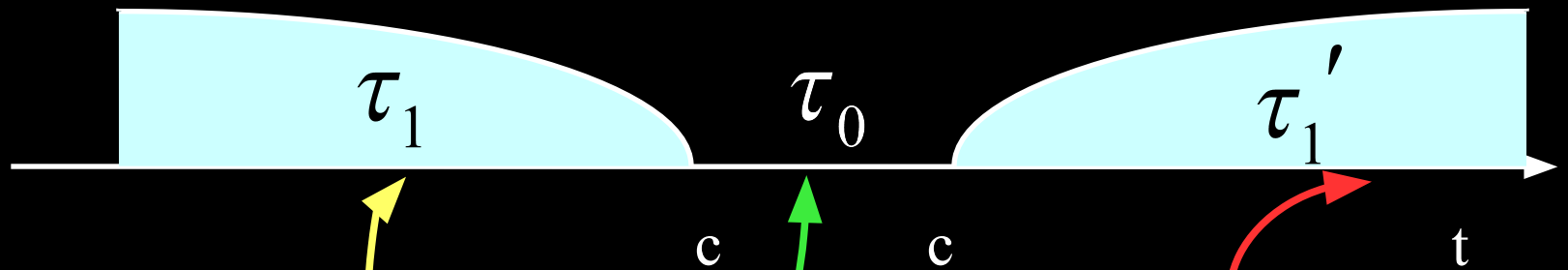
- *критическую область τ_1*
- *область принятия гипотезы τ_0*

Критические области

Односторонние



Двусторонняя



Неправдоподобно
маленькие значения

1 Приемлемые значения 2

Неправдоподобно
большие значения

Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы τ_0 , то принимается *нулевая* гипотеза, в противном случае она отвергается (принимается *альтернативная* гипотеза)



Задать статистический критерий

значит:

- задать статистику критерия
- задать критическую область

В ходе проверки гипотезы H_0 можно прийти к правильному выводу, либо совершить **два рода ошибок**:

- ошибку первого рода -- **отклонить H_0** , когда она верна
- ошибку второго рода -- **принять H_0** , когда она не верна.

Так как статистика критерия $T(X) \in \tau$ есть случайная величина со своим законом распределения, то попадание её в ту или иную область характеризуется соответствующими вероятностями:

- вероятностью ошибки первого рода α
- вероятностью ошибки второго рода β

Ошибку первого рода α ещё называют уровнем значимости критерия.

Часто пользуются понятием **мощности критерия W** -- вероятности попадания в критическую область при условии справедливости альтернативной гипотезы

$$W = 1 - \beta$$

В общем случае вводят функцию
МОЩНОСТИ

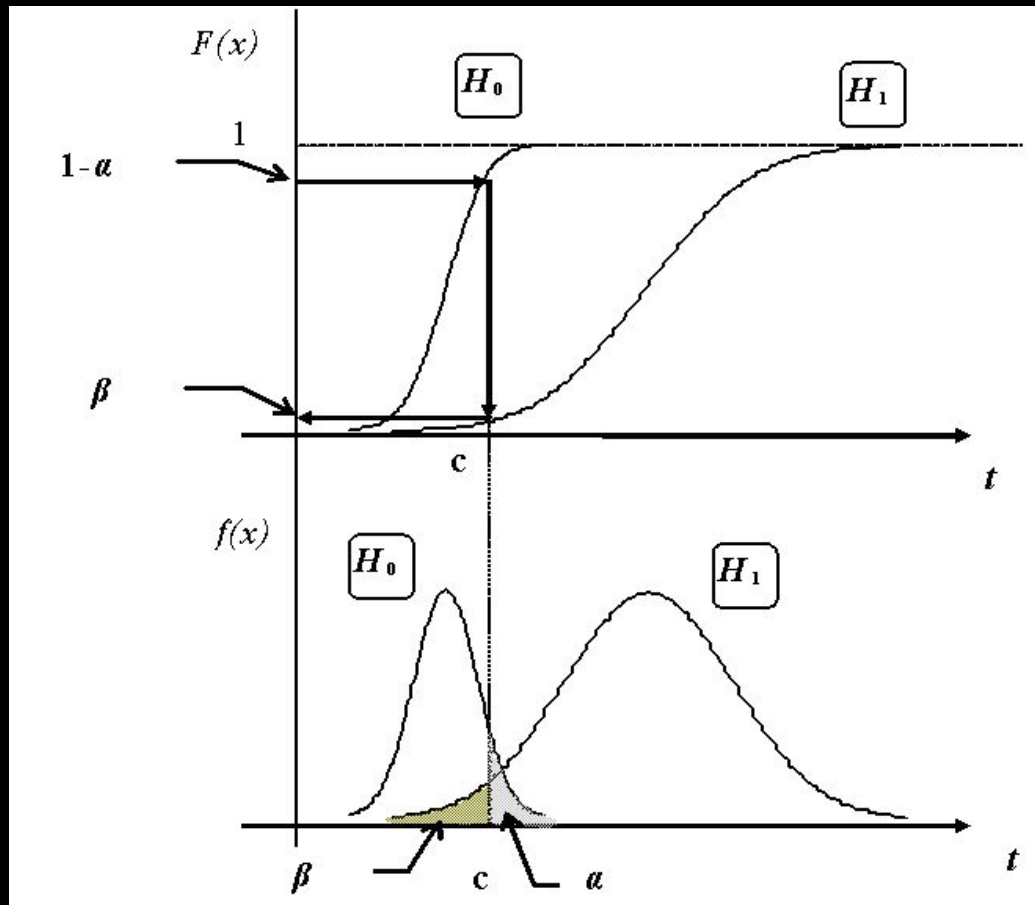
$$W(F) = P(T(X) \in \tau_1 | F)$$

$$\alpha = W(F_0), \quad \beta = 1 - W(F_1)$$

$$W = W(F_1)$$

При разработке статистического критерия невозможно одновременно минимизировать обе ошибки. Поэтому поступают следующим образом: при заданном числе испытаний n устанавливается верхняя граница для ошибки первого рода α . Выбирается тот критерий, у которого наименьшая ошибка второго рода.

Распределение статистики критерия для нулевой и альтернативной гипотез (односторонний критерий)



Уровень значимости α устанавливается из значений следующего ряда:

$0.05, 0.01, 0.005, \dots$

события с такими вероятностями считаются практически невозможными.

Допустимая величина уровня значимости определяется теми последствиями, которые наступают после совершения ошибки.

Примеры формулировок статистических гипотез

Гипотеза о виде распределения:

произведено n независимых измерений случайной величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$.

Следует проверить гипотезу:

$$H_0 : F_{\xi}(x) \in \Phi_0$$

Гипотеза однородности

Произведено k серий независимых испытаний
 $(x_1, x_2, \dots, x_{n1})_1, (x_1, x_2, \dots, x_{n2})_2, \dots, (x_1, x_2, \dots, x_{nk})_k$

Можно ли с достаточной надежностью считать, что закон распределения наблюдений от серии к серии не менялся? Если это так, то статистические данные однородны.

Проверяется гипотеза однородности:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_k(x)$$

Гипотеза независимости


Наблюдается двумерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с неизвестной функцией распределения $F_\xi(x, y)$ и есть основания полагать, что компоненты ξ_1, ξ_2 -- независимы.


В этом случае проверяется **гипотеза независимости**:

$$H_0 : F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$$

Пять шагов проверки гипотезы

- 1 шаг – выдвигается основная гипотеза H_0
- 2 шаг – задается уровень значимости α
- 3 шаг – задается статистика критерия $T(X)$ с известным законом распределения

- 
- 4 шаг – из таблиц распределения статистики критерия находятся квантили, соответствующие границам критической области
 - 5 шаг – для данной выборки рассчитывается значение статистики критерия



Если значение статистики критерия попадает в область принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается на уровне значимости α .

В противном случае принимается альтернативная гипотеза (отвергается нулевая гипотеза)

Среди критериев выделяются такие, которые улавливают любые отклонения от нулевой гипотезы.

Они называются

« критерии согласия »

Критерий согласия Колмогорова

Применяется для проверки гипотезы о виде распределения

$$H_0: F_n(X) = F(X)$$

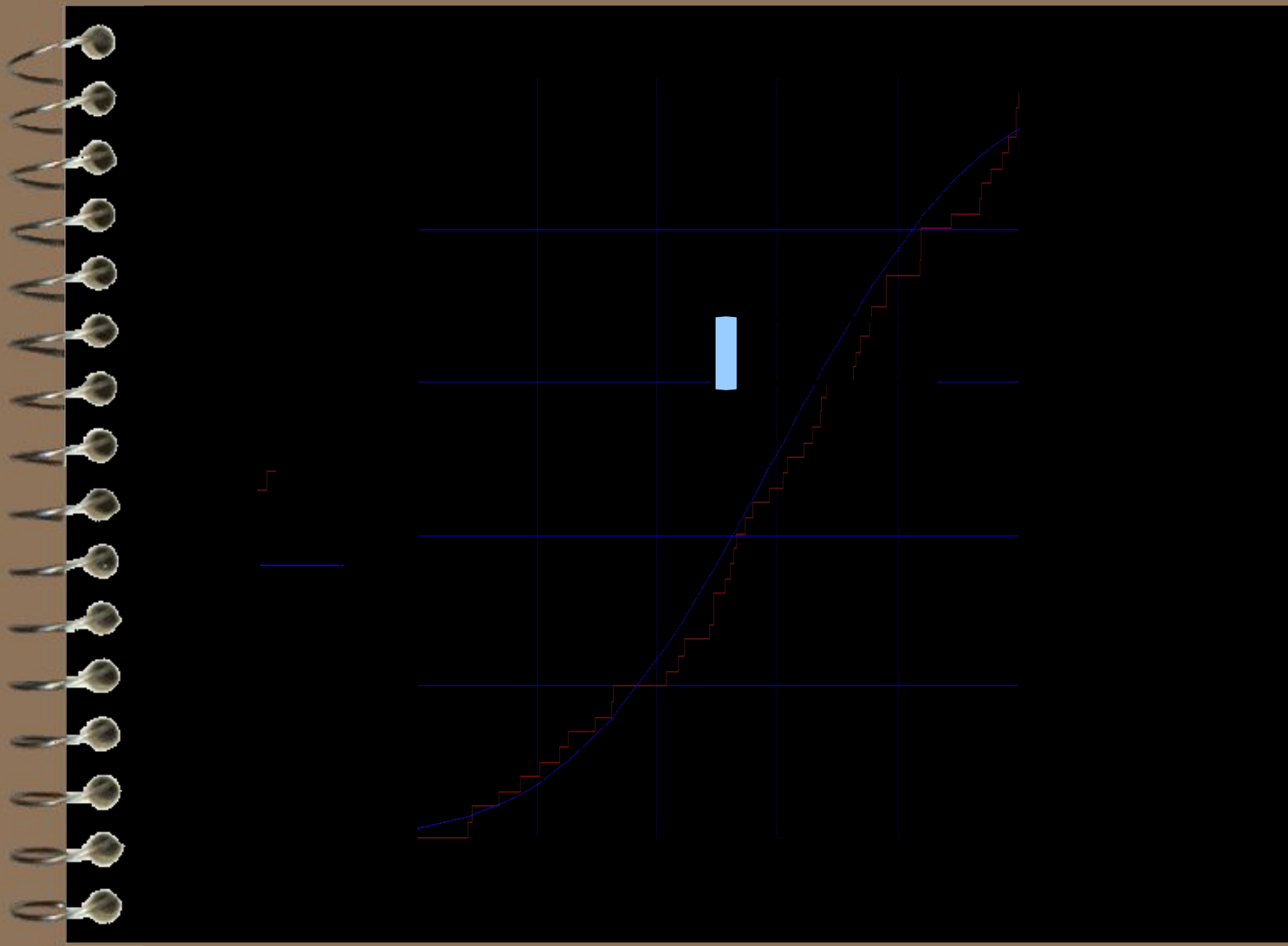
$$H_1: F_n(X) \neq F(X)$$

При условии, что теоретическая функция распределения непрерывная и полностью определена

Критерий согласия Колмогорова

За меру близости распределений принимается максимальное отклонение *эмпирической* функции распределения $F_n(x)$ от *теоретической* $F(x)$.

$$D_n = \max |F(x) - F_n(x)|$$



Статистика критерия

$$T(X) = \sqrt{n} \cdot D_n = \sqrt{n} \cdot \max [F(X) - F_n(X)]$$

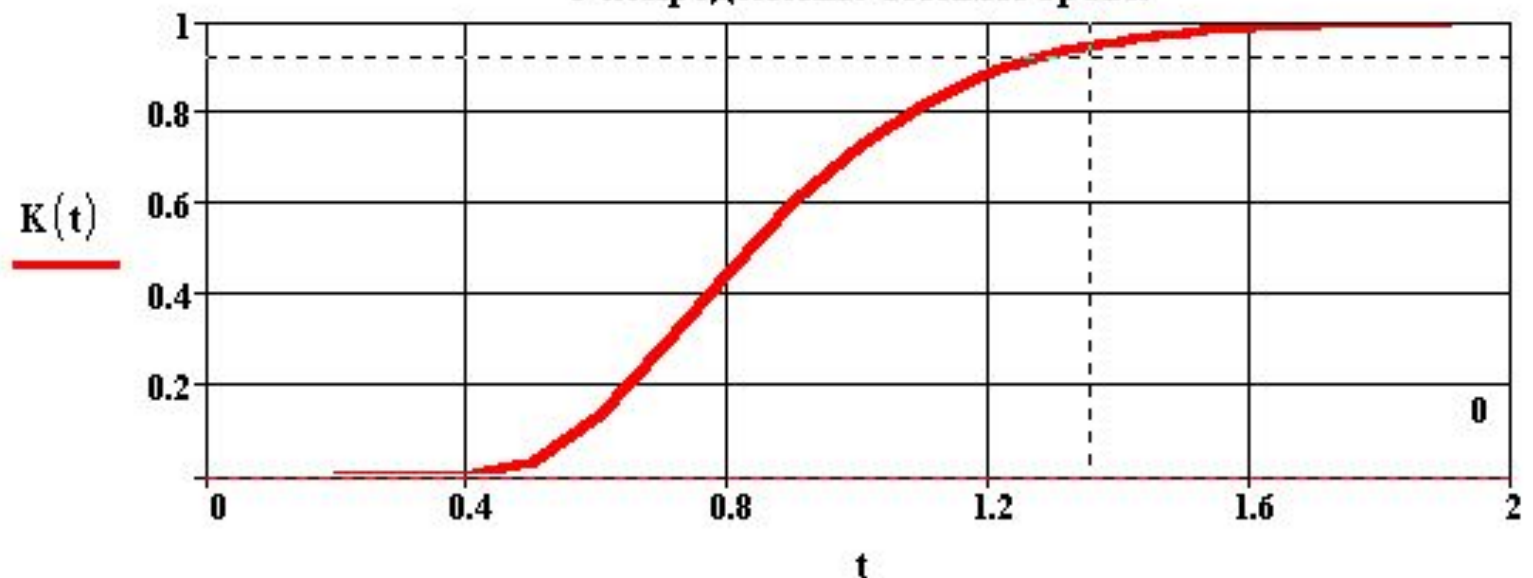
Распределение статистики Колмогорова не зависит от $F(x)$.

При больших n оно стремится к распределению Колмогорова.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{n} D_n(X) \leq t\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 t^2}$$

$$K(t) := \sum_{i = -2001}^{2001} \left[[(-1)^{-i}] \cdot e^{-(2 \cdot i^2 \cdot t^2)} \right] \quad t := 0, 0.1 \dots 2$$

Распределение Колмогорова



Расчет квантилей распределения Колмогорова

$$qK(t, \text{alfa}) := \text{root}(K(t) - \text{alfa}, t)$$

$$qK(1, 0.95) = 1.358099$$



Критерий согласия χ^2 Пирсона
(хи-квадрат)

Первоначально разработан для
дискретных распределений

Простейшие параметрические гипотезы

- Гипотезы о среднем значении гауссовской случайной величины
- Гипотезы о сравнении дисперсий