Лекция №4

Корреляционный анализ детерминированных процессов

Рассмотрим эту функцию на ограниченном интервале времени $[-T, T]$. Среднее арифметическое значение данной функции в точках x_i, $i = \overline{0, n}$ определяется известным выражением

$$\bar{x}_{2T} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n}. \tag{4.1}$$

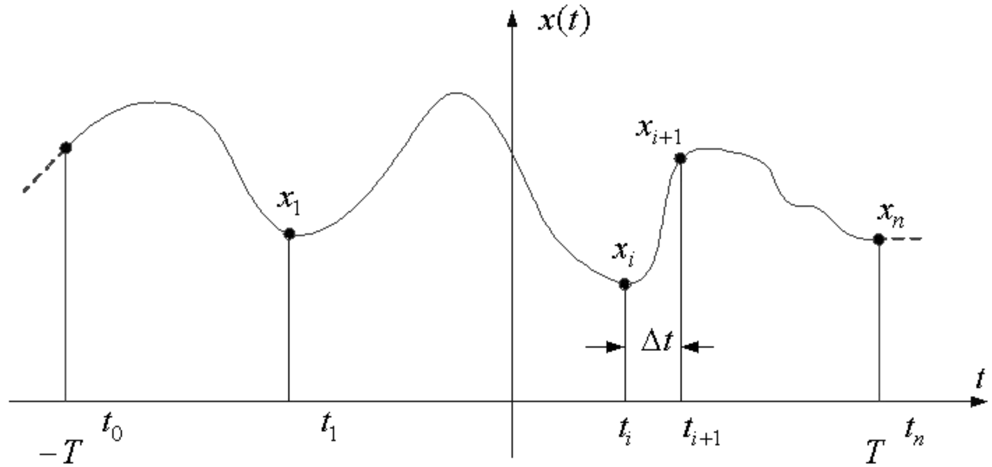

Рис. 4.1 -Временная функция $x(t)$ неограниченной длительности

Умножая числитель и знаменатель (4.1) на Δt, получим:

$$\bar{x}_{2T} = \frac{\sum_{k=0} x_k \Delta t}{N\Delta t} = \frac{1}{2T}\sum_{k=0}^{N} x_k \Delta t$$

при $\Delta t \to 0$

$$\bar{x}_{2T} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt \qquad (4.2)$$

Очевидно, что (4.2) представляет собой среднее значение или постоянную составляющую процесса $x(t)$.

Среднее значение квадрата функции $x(t)$:

$$\overline{x^2_{2T}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt \qquad (4.3)$$

Среднее значение квадрата отклонения процесса от среднего

$$\overline{[x(t)-\bar{x}]^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-\bar{x}]^2\,dt \qquad (4.4)$$

равно средней мощности переменной составляющей процесса.

временная ковариационная функция

$$[illegible] = \lim_{[illegible] \to \infty} \frac{1}{2[illegible]} \int_{-[illegible]}^{[illegible]} [illegible] - [illegible] \tag{4.5}$$

И временная корреляционная функция

$$[illegible] = \lim_{[illegible] \to \infty} \frac{1}{2[illegible]} \int_{-[illegible]}^{[illegible]} [illegible] - [illegible] - [illegible] - [illegible] \tag{4.6}$$

Между которыми существует очевидная связь

$$[illegible] = [illegible] - [illegible]^2 \tag{4.7}$$

На рис. 1.5.2 и 1.5.3 изображены ковариационные функции процессов с различными скоростями изменения.

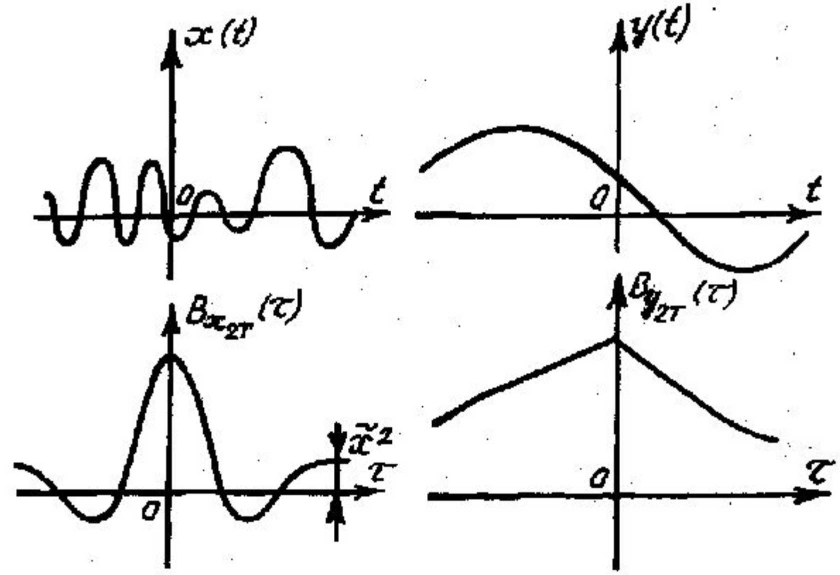

Рис. I.5.2 Рис. I.5.3

временная взаимная ковариационная функция двух процессов

$$B_{xy_{2T}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,y(t-\tau)\,dt \qquad (4.8)$$

Случай положительной ковариации иллюстрируется рис. 1.54, а отрицательной - 1.55.

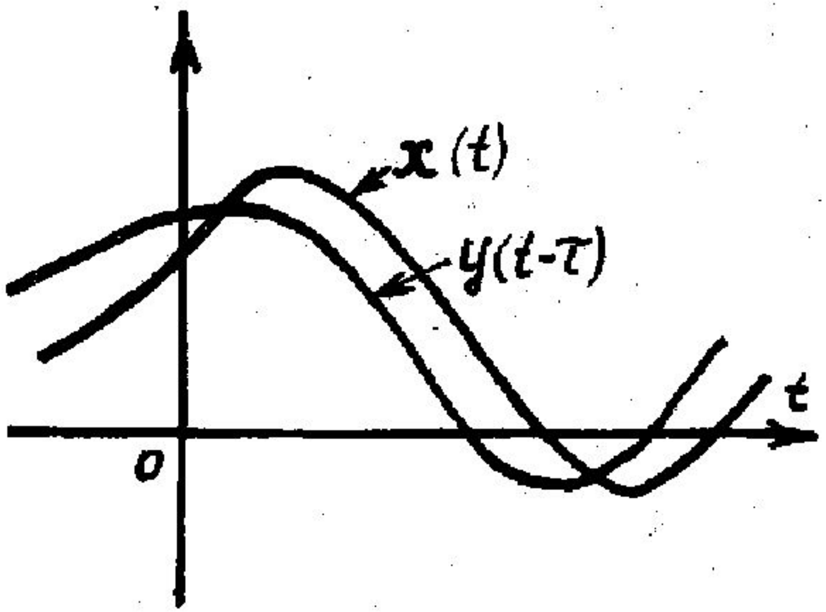

Рис. I.5.4

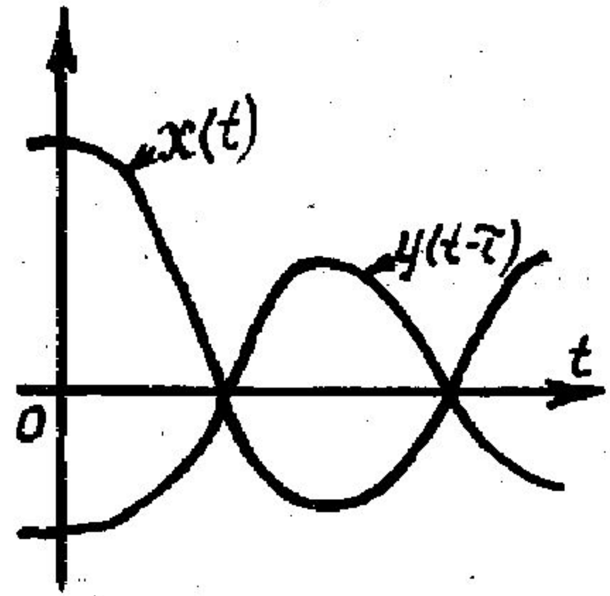

Рис. I.5.5

Основные свойства конечной временной ковариационной функции можно сформулировать следующим образом.

1. Ковариационная функция $B_u(\tau)$ принимает минимальное значение при $\tau = 0$. Функцию $B_u(\tau)$ можно трактовать как энергию взаимодействия колебаний $u(t)$ и $u(t - \tau)$. Очевидно, что при $\tau = 0$ наступает максимум этой энергии, поскольку колебание в этом случае взаимодействует "само с собой".

2. Функция $B_u(\tau)$ является четной:

$$B_u(\tau) = B_u(-\tau)$$

поскольку безразлично, в какую сторону - вправо или влево сдвигать относительно своей копии сигнал.

3. Ковариационная функция является убывающей (необязательно монотонно) функцией для сигналов конечной длительности и имеющих конечную энергии (т.е. для реальных сигналов).

4. Сигналы, ограниченные по длительности временным интервалом [0,T], имеют ковариационную функцию, тождественно равную нулю вне отрезка оси 2T.

Для нормированной корреляционной функции $R_x(\tau)$ стационарного случайного процесса при любом τ справедливо соотношение

$$|R_x(\tau)| \leq 1$$

Кроме того,

$$R_x(0) = 1$$

$$\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = 0$$

$$|R_x(\tau)|_{\tau > \tau_0} < 0{,}05$$

Используя и другое определение времени корреляции

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| \, d\tau$$

Предположим, что имеются два колебания $s_1(t)$, $s_2(t)$. Найдем энергию их суммы:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt + \int s_2^2(t) dt +$$

$$+2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt \qquad (4.9)$$

Первые два интеграла в правой части соответствуют энергии E_1 и E_2 сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ а последний определяет энергию взаимодействия между ними.

Энергия взаимодействия некогерентных колебаний

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t)\, dt = 0$$

Упростим выражение (4.9) можно записать в следующем виде:

$$E = B_{s_1}(0) + B_{s_2}(0) + 2B_{s_1 s_2}(0) \qquad (4.10)$$

Запишем, исходное модулированное колебание в следующем виде:

$$s(t) = A(t) \bullet \cos(\omega_0 t + \Theta(t)) = \mathrm{Re}\left[A(t)\, e^{j\Theta(t)}\, e^{j\omega_0 t}\right] \qquad (4.11)$$

где ω_0 – некоторая центральная частота колебания.

Сдвинутые по времени τ и смещенные по частоте на Ω колебания записываются так

$$s_{\tau\Omega}(t) = A(t+\tau) \bullet \cos\left((\omega_0 + \Omega)(t+\tau) + \Theta(t+\tau)\right) = \mathrm{Re}\left[\dot{A}(t+\tau)\, e^{j(\omega_0+\Omega)(t+\tau)}\right] \qquad (4.12)$$

Выражения (4.11) и (4.12) можно переписать в ином виде, воспользовавшись понятием комплексной огибающей сигнала:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{A}(t)\, e^{j\omega_0 t}\right], \qquad (4.13)$$

$$s_{\tau\Omega}(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{A}(t+\tau)\, e^{j(\omega_0+\Omega)t}\, e^{j(\omega_0+\Omega)\tau}\right] \qquad (4.14)$$

где $\dot{A}(t) = A(t)\, e^{j\Theta(t)}$, где $\dot{A}(t+\tau) = A(t+\tau)\, e^{j\Theta(t+\tau)}$ – комплексные огибающие соответствующих сигналов.

Для дальнейших выкладок удобно перейти к комплексному представлению колебаний:

$$\dot{u}(t) = U(t)\,e^{j\omega_0 t} \text{ и } \dot{u}_{\tau\Omega}(t) = U(t+\tau)\,e^{j(\omega_0+\Omega)t}\,e^{j(\omega_0+\Omega)\tau}.$$

действительные части которых соответствуют $u(t)$ и $u_{\tau\Omega}(t)$.

Найдем конечную корреляционную функцию комплексного процесса $\dot{u}(t)$ с учетом сдвига по времени и частоте:

$$\dot{B}_{u}(\tau,\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}(t)\,\dot{u}^{*}_{\tau\Omega}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\,e^{j\omega_0 t}\,U^{*}(t+\tau)\,e^{j(\omega_0+\Omega)t}\,e^{j(\omega_0+\Omega)\tau}\,dt =$$

$$= e^{-j(\omega_0+\Omega)\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\,U^{*}(t+\tau)\,e^{-j\Omega t}\,dt \qquad (4.15)$$

Данное выражение определяет так называемую обобщенную корреляционную функцию сигнала. Модуль выражения (1.70)

$$\left|\dot{B}_{u}(\tau,\Omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\,U^{*}(t+\tau)\,e^{-j\Omega t}\,dt\right|. \qquad (4.16)$$

Называется двумерной корреляционной функцией. Ее можно пронормировать в соответствии с выражением

$$\rho(\tau,\Omega) = \frac{\left|\dot{B}_{u}(\tau,\Omega)\right|}{B_{u}(0,0)} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} U(t)\,U^{*}(t+\tau)\,e^{-j\Omega t}\,dt\right|}{\int_{-\infty}^{+\infty} U^{2}(t)\,dt} \qquad (4.17)$$

Для того чтобы от $\dot{B}_{u}(\tau,\Omega)$ перейти к корреляционной функции исходного колебания $u(t) = U(t)\cos[\omega_0 t + \Theta(t)]$, необходимо положить в (4.15) $\Omega = 0$ и выделить вещественную часть функции $\dot{B}_{u}(\tau,0)$.