



МЧС России

Санкт-Петербургский университет  
государственной противопожарной службы



**КАФЕДРА  
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
И СИСТЕМНОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ  
СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ**

**Лекция**  
**по дисциплине**  
**«Статистический анализ случайных**  
**процессов»**

- **Тема № 2. Преобразование случайных процессов.**
- **Занятие 2.1 Преобразование случайных процессов линейными операторами.**

# Цели лекции:

- Изучить характеристики преобразованных случайных процессов.
- Научиться интегрировать и дифференцировать случайные процессы.

# *Учебные вопросы:*

- 1. Определение характеристик преобразованных случайных процессов.
- 2. Сходимость случайных процессов в среднеквадратичном смысле.
- 3. Операторы интегрирования и дифференцирования.

# Литература:

## ***Основная:***

- 1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учебное пособие – 5-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2013. – 448 с.
- 2. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 496 с.
- 3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие – 11-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2013. – 404 с.

## ***Дополнительная:***

- 1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 2007. – 208 с.
- 2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов – М.: ЮНИТИ -ДАНА, 2012. – 551 с.
- 3. Таранцев А.А. Инженерные методы теории массового обслуживания. – СПб: СПбУГПС МЧС, 2006

# **1. Определение характеристик преобразованных случайных процессов.**

$$\underline{Y(t)} = A \{X(t)\}$$

Преобразование A называется *оператором*.

**Оператором A** называется множество математических операций, в результате выполнения которых данным функциям приводятся в соответствие другие функции.

Указанное выше равенство читается так: Y(t) – результат применения оператора A к случайной функции X(t).

Виды операторов можно подразделить на две группы: *линейные и нелинейные*. Линейные, в свою очередь, делятся на однородные и неоднородные.

Оператор  $L$  называется **линейным однородным оператором**, если:

1).  $L\{X_1(t)+X_2(t)\}=L\{X_1(t)\}+L\{X_2(t)\};$

2).  $L\{CX(t)\}=CL\{X(t)\}.$

Из второго условия следует, что  $L\{0\}=0$ , т.е. при нулевом воздействии (отсутствии) реакция системы равна нулю.

**Пример 1.** Линейными однородными являются:

1). Оператор умножения на неслучайную функцию  $f(t)$ :

$$\underline{Y(t)} = L\{X(t)\} = f(t)X(t);$$

2). Оператор дифференцирования:

$$\underline{Y(t)} = L\{X(t)\} = \frac{dX(t)}{dt};$$

3). Оператор интегрирования:

$$\underline{Y(t)} = L\{X(t)\} = \int_0^t X(t) dt.$$

Оператор  $L$  называется **линейным неоднородным**, если он состоит из линейного однородного оператора  $L_0$  с прибавлением некоторой, вполне определенной функции  $\varphi(t)$ :

$$L\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + \varphi(t).$$

**Пример 2.** Линейными неоднородными будут следующие операторы:

1).  $Y(t) = L\{X(t)\} = f(t)X(t) + \varphi(t)$ ;

2).  $Y(t) = L\{X(t)\} = \frac{dX(t)}{dt} + \varphi(t)$ ;

3).  $Y(t) = L\{X(t)\} = \int_0^t X(t)dt + \varphi(t)$ .

## 1. Умножение случайной функции на неслучайную функцию.

Пусть случайная функция  $Y(t)$  связана со случайной функцией  $X(t)$  линейным однородным оператором умножения на неслучайную функцию  $f(t)$ :

$$Y(t) = f(t)X(t).$$

Требуется найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции  $Y(t)$ , если известны  $m_x(t)$ ,  $K_x(t_1, t_2)$ .

Найдем математическое ожидание  $m_y(t)$ :

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[f(t)X(t)].$$

Так как  $f(t)$  является неслучайной функцией, то ее можно вынести за знак математического ожидания. Окончательно получим:

$$m_y(t) = f(t)m_x(t). \quad (1)$$

Таким образом,

*при умножении случайной функции на неслучайную, математическое ожидание также умножится на эту же неслучайную функцию.*

Чтобы найти корреляционную функцию случайной функции  $Y(t)$ , достаточно воспользоваться свойством 4 корреляционной функции:

$$\underline{K}_Y(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2) * \underline{K}_X(t_1, t_2). \quad (2)$$

Если, в частности,  $f(t) = C = \text{const}$ , т.е.  $Y(t) = CX(t)$ , то

$$\begin{aligned} \underline{m}_Y(t) &= C \underline{m}_X(t); \\ \underline{K}_Y(t_1, t_2) &= C^2 \underline{K}_X(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. Сложение случайных функций.

Пусть даны случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  и известны их характеристики  $m_x(t)$ ,  $m_y(t)$ ,  $K_x(t_1, t_2)$ ,  $K_y(t_1, t_2)$  и корреляционная функция связи  $K_{xy}(t_1, t_2)$ .

Требуется найти характеристики суммы этих случайных функций:

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

На основании свойства математического ожидания имеем:

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t), \quad (4)$$

т.е.

*при сложении случайных функций их математические ожидания также складываются.*

Найдем корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} K_z(t_1, t_2) &= M[\dot{Z}(t_1) \dot{Z}(t_2)] = M[\{\dot{X}(t_1) + \dot{Y}(t_1)\} \{\dot{X}(t_2) + \dot{Y}(t_2)\}] = \\ &= M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] + M[\dot{X}(t_1) \dot{Y}(t_2)] + M[\dot{Y}(t_1) \dot{X}(t_2)] + \\ &\quad + M[\dot{Y}(t_1) \dot{Y}(t_2)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + K_{xy}(t_1, t_2) + K_{yx}(t_1, t_2). \quad (5)$$

Если случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  некоррелированы, то

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{yx}(t_1, t_2) = 0$$

и корреляционная функция  $K_z(t_1, t_2)$  примет вид:

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2). \quad (6)$$

- **Вопрос 2. Сходимость случайных процессов в среднеквадратичном смысле.**

Введем понятие среднеквадратичного предела.

Случайная величина  $X_0$  называется **среднеквадратическим пределом** случайной функции  $X(t)$  в точке  $t_0$ , если:

$$\text{l. i. m.}_{t \rightarrow t_0} \underline{M}[(X(t)-X_0)^2]=0.$$

В этом случае будем писать:

$$\underline{\text{l. i. m.}} X(t) = X_0$$

Если  $X_0$  есть среднеквадратический предел  $X(t)$  при  $t \rightarrow t_0$ , то

$$\text{l. i. m.}_{t \rightarrow t_0} M(X) = M(X_0),$$

т.е.

*математическое ожидание предела равно пределу математического ожидания.*

Случайная функция  $X(t)$  называется **дифференцируемой в точке  $t_0$** , если существует предел

$$\text{l. i. m.}_{t \rightarrow t_0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = X'(t_0).$$

Этот предел называется **производной случайной функции  $X(t)$  в точке  $t_0$** . Если производная существует во всех точках промежутка  $[a, b]$ , то случайная функции называется **дифференцируемой в этом промежутке**.

Следовательно,

$$X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \text{l. i. m.}_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

- **Вопрос 3. Операторы интегрирования и дифференцирования.**
- **Дифференцирование случайной функции.**

Пусть  $X(t)$  дифференцируемая случайная функция с математическим ожиданием  $m_x(t)$  и корреляционной функцией  $K_x(t_1, t_2)$ .

Требуется найти характеристики случайной функции  $Y(t)$ , если

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

По определению производной

$$Y(t) = X'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

Приравняем математическое ожидание обеих частей равенства, затем воспользуемся тем, что математическое ожидание предела равно пределу математического ожидания:

$$M[Y(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M\left[\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right]$$

Используя свойства математического ожидания, получим

$$M[Y(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t}$$

Отсюда

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt} \tag{7}$$

Следовательно,

*математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от математического ожидания случайной функции*

Найдем корреляционную функцию  $K_y(t_1, t_2)$  случайной функции  $Y(t)$ .  
Очевидно,

$$\dot{Y}(t) = \frac{d\dot{X}(t)}{dt}$$

поэтому

$$K_y(t_1, t_2) = M[\dot{Y}(t_1)\dot{Y}(t_2)] = M\left[\frac{d\dot{X}(t_1)}{dt_1}\frac{d\dot{X}(t_2)}{dt_2}\right]$$

Так как

$$\frac{d\dot{X}(t_1)}{dt_1}\frac{d\dot{X}(t_2)}{dt_2} = \frac{\partial^2 \dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (8)$$

то

$$K_y(t_1, t_2) = M\left[\frac{\partial \dot{X}(t_1)}{\partial t_1}\frac{\partial \dot{X}(t_2)}{\partial t_2}\right] = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Итак,

*корреляционная функция производной от случайной функции равна второй смешанной частной производной корреляционной функции исходной случайной функции  $X(t)$ .*

**Пример 4.** Случайная функция  $X(t)$  имеет характеристики:

$$m_x(t) = 3t^2 + 4t, \quad K_t(t_1, t_2) = e^{-t_1^2 - t_2^2}$$

Найти характеристики случайной функции

$$Y(t) = 2t^2 \frac{dX(t)}{dt} + 5t$$

**Решение.**

Так как случайная функция  $Y(t)$  есть результат дифференцирования и умножения на неслучайную функцию, примененных к данной случайной функции  $X(t)$ , то на основании формул (1), (4) и (7) получим

$$m_y(t) = M[Y(t)] = 2t^2 \frac{dm_x(t)}{dt} + 5t$$

Аналогично определяется корреляционная функция  $K_y(t_1, t_2)$  по формулам (2) и (8):

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= f(t_1)f(t_2) \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \\ &= 2t_1^2 2t_2^2 4t_1 t_2 e^{-t_1^2 - t_2^2} = 16t_1^3 t_2^3 e^{-t_1^2 - t_2^2} \end{aligned}$$

Отсюда

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 16t^6 e^{-2t^2}$$

## Интегрирование случайной функции.

Пусть случайная функция  $Y(t)$  связана с  $X(t)$  линейным однородным оператором интегрирования

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau \quad (9)$$

Требуется найти характеристики случайной функции  $Y(t)$  при условии, что характеристики случайной функции  $X(t)$  известны. Для этой цели равенство (9) представим в виде предела интегральной суммы

$$Y(t) = \text{l. i. m.}_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(t_i) \Delta t_i$$

Приравняем математическое ожидание обеих частей равенства, а затем изменим порядок нахождения математического ожидания и предела:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = M \left[ \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n X(t_i) \Delta t_i \right] = \\ &= \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n M[X(t_i)] \Delta t_i = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n m_x(t_i) \Delta t_i = \int_0^t m_x(t) dt \end{aligned}$$

Итак,

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau \quad (10)$$

Найдем корреляционную функцию  $K_y(t_1, t_2)$ .

Очевидно,

$$\dot{Y}(t) = \int_0^t \dot{X}(\tau) d\tau$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M[\dot{Y}(t_1)\dot{Y}(t_2)] = M \int_0^{t_1} \dot{X}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} \dot{X}(\tau_2) d\tau_2 = \\ &= M \left[ \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dot{X}(\tau_1)\dot{X}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M[\dot{X}(\tau_1)\dot{X}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (11)$$

Т.е.

*корреляционная функция интеграла от случайной функции равна двойному интегралу от корреляционной функции исходной случайной функции.*

**Пример 5.** На вход интегрирующего механизма поступает случайная функция  $X(t)$  с  $m_x(t)=3t^2-7t+8$ ,  $K_x(t_1,t_2)=\cos\omega t_1 \cos\omega t_2$ . Найти характеристики случайной функции  $Y(t)$ .

**Решение.**

Воспользуемся формулами (10) и (11):

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau = \int_0^t (3\tau^2 - 7\tau + 8) d\tau = t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 8t;$$

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cos \omega \tau_1 \cos \omega \tau_2 d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^{t_1} \cos \omega \tau_1 d\tau_1 \int_0^{t_2} \cos \omega \tau_2 d\tau_2 = \frac{1}{\omega\omega} \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 \end{aligned}$$

Отсюда

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega t$$

**Пример 6.** Случайная функция  $X(t)$  имеет характеристики:

$$m_x(t) = 6t - 4, \quad K_x(t_1, t_2) = t_1 t_2.$$

Найти характеристики случайной функции

$$Y(t) = \frac{1}{t^3} \int_0^t X(\tau) d\tau - 8t + 5$$

**Решение.**

Так как случайная функция  $Y(t)$  есть результат интегрирования и умножения на неслучайную функцию с прибавлением неслучайной функции, то

$$\begin{aligned} m_y(t) &= \frac{1}{t^3} \int_0^t m_x(\tau) d\tau - 8t + 5 = \frac{1}{t^3} \int_0^t (6\tau - 4) d\tau - 8t + 5 = \\ &= \frac{1}{t^3} (3t^2 - 4t) - 8t + 5 = \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2} - 8t + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_y(t) &= \frac{1}{t_1^3} \frac{1}{t_2^3} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_1 \tau_2) = \frac{1}{t_1^3} \frac{1}{t_2^3} \int_0^{t_1} \tau_1 d\tau_1 \int_0^{t_2} \tau_2 d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{t_1^3} \frac{1}{t_2^3} \frac{1}{2} t_1^2 \frac{1}{2} t_2^2 = \frac{1}{4t_1 t_2} \end{aligned}$$

Отсюда

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \frac{1}{4t^2}$$

## Задание на самоподготовку

- 1. Изучить материал лекции.
- 2. Ознакомиться с литературой по теме занятия.
- 3. Подготовиться к практическому занятию.