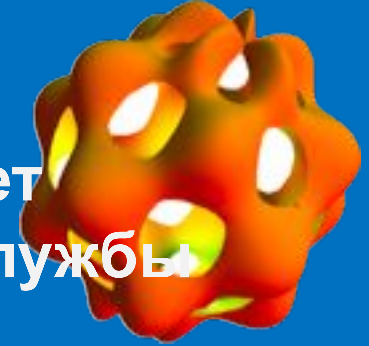
МЧС России
Санкт- Петербургский университет
государственной противопожарной службы



КАФЕДРА
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
И СИСТЕМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ

Лекция
по дисциплине
«Статистический анализ случайных процессов»

- Тема № 2. Преобразование случайных процессов.
- Занятие 2.1 Преобразование случайных процессов линейными операторами.

Цели лекции:

- Изучить характеристики преобразованных случайных процессов.
- Научиться интегрировать и дифференцировать случайные процессы.

Учебные вопросы:

- 1. Определение характеристик преобразованных   случайных процессов.
- 2. Сходимость случайных процессов в среднеквадратичном смысле.
- 3. Операторы интегрирования и дифференцирования.

Литература:

Основная:

- 1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учебное пособие – 5-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2013. – 448 с.
- 2. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 496 с.
- 3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие – 11-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2013. – 404 с.

Дополнительная:

- 1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 2007. –208 с.
- 2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов – М.: ЮНИТИ -ДАНА, 2012. – 551 с.
- 3. Таранцев А.А. Инженерные методы теории массового обслуживания. – СПб: СПбУГПС МЧС, 2006

1. Определение характеристик преобразованных случайных процессов.

$$Y(t)=A\{X(t)\}$$

Преобразование A называется *оператором.*

Оператором A называется множество математических операций, в результате выполнения которых данным функциям приводятся в соответствие другие функции.

Указанное выше равенство читается так: Y(t) – результат применения оператора A к случайной функции X(t).

Виды операторов можно подразделить на две группы: *линейные и нелинейные.* Линейные, в свою очередь, делятся на однородные и неоднородные.

Оператор L называется **линейным однородным оператором**, если:

1). $L\{X_1(t)+X_2(t)\}=L\{X_1(t)\}+L\{X_2(t)\}$;

2). $L\{CX(t)\}=CL\{X(t)\}$.

Из второго условия следует, что $L\{0\}=0$, т.е. при нулевом воздействии (отсутствии) реакция системы равна нулю.

Пример 1. Линейными однородными являются:

1). Оператор умножения на неслучайную функцию f(t):

$$Y(t)=L\{X(t)\}=f(t)X(t);$$

2). Оператор дифференцирования:

$$Y(t)=L\{X(t)\}=\frac{dX(t)}{dt};$$

3). Оператор интегрирования:

$$Y(t)=L\{X(t)\}=\int_0^t X(t)dt.$$

Оператор L называется **линейным неоднородным**, если он состоит из линейного однородного оператора L_0 с прибавлением некоторой, вполне определенной функции φ(t):

$$L\{X(t)\}=L_0\{X(t)\}+\varphi(t).$$

Пример 2. Линейными неоднородными будут следующие операторы:

1). $Y(t)=L\{X(t)\}=f(t)X(t)+\varphi(t)$;

2). $Y(t)=L\{X(t)\}=\frac{dX(t)}{dt}+\varphi(t)$;

3). $Y(t)=L\{X(t)\}=\int_0^t X(t)dt+\varphi(t)$.

1. Умножение случайной функции на неслучайную функцию.

Пусть случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ линейным однородным оператором умножения на неслучайную функцию $f(t)$:

$$Y(t)=f(t)X(t).$$

Требуется найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции $Y(t)$, если известны $m_x(t)$, $K_x(t_1,t_2)$.

Найдем математическое ожидание $m_y(t)$:

$$m_y(t)=M[Y(t)]=M[f(t)X(t)].$$

Так как $f(t)$ является неслучайной функцией, то ее можно вынести за знак математического ожидания. Окончательно получим:

$$m_y(t)=f(t)m_x(t). \qquad (1)$$

Таким образом,

при умножении случайной функции на неслучайную, математическое ожидание также умножится на эту же на эту неслучайную функцию.

Чтобы найти корреляционную функцию случайной функции Y(t), достаточно воспользоваться свойством 4 корреляционной функции:

$$K_y(t_1,t_2)=f(t_1)f(t_2)*K_x(t_1,t_2). \qquad (2)$$

Если, в частности, f(t)=C=const, т.е. Y(t)=CX(t), то

$$m_y(t)=Cm_x(t);$$

$$K_y(t_1,t_2)=C^2K_x(t_1,t_2). \qquad (3)$$

2. Сложение случайных функций.

Пусть даны случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ и известны их характеристики $m_x(t)$, $m_y(t)$, $K_x(t_1,t_2)$, $K_y(t_1,t_2)$ и корреляционная функция связи $K_{xy}(t_1,t_2)$.

Требуется найти характеристики суммы этих случайных функций:

$$Z(t)=X(t)+Y(t).$$

На основании свойства математического ожидания имеем:

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y(t), \tag{4}$$

т.е.

при сложении случайных функций их математические ожидания также складываются.

Найдем корреляционную функцию:

$$K_z(t_1,t_2)=M[\dot{Z}(t_1)\ \dot{Z}(t_2)]=M[\{\dot{X}(t_1)+\dot{Y}(t_1)\}\{\dot{X}(t_2)+\dot{Y}(t_2)\}]=$$

$$=M[\dot{X}(t_1)\ \dot{X}(t_2)]+M[\dot{X}(t_1)\ \dot{Y}(t_2)]+M[\dot{Y}(t_1)\ \dot{X}(t_2)]+$$

$$+M[\dot{Y}(t_1)\ \dot{Y}(t_2).$$

Отсюда

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2)+K_{xy}(t_1,t_2)+K_{yx}(t_1,t_2). \quad (5)$$

Если случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированы, то

$$K_{xy}(t_1,t_2)=K_{yx}(t_1,t_2)=0$$

и корреляционная функция $K_z(t_1,t_2)$ примет вид:

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2). \quad (6)$$

- **Вопрос 2. Сходимость случайных процессов в среднеквадратичном смысле.**

Введем понятие среднеквадратичного предела.

Случайная величина X_0 называется **среднеквадратическим пределом** случайной функции $X(t)$ в точке t_0, если:

$$\underset{t \to t_0}{\mathrm{l.i.m.}}\ M[(X(t)-X_0)^2]=0.$$

В этом случае будем писать:

$$\mathrm{l.i.m.}X(t)= X_0$$

Если X_0 есть среднеквадратический предел $X(t)$ при $t \to t_0$, то

$$\underset{t \to t_0}{\mathrm{l.i.m.}}\ M(X) = M(X_0),$$

т.е.

математическое ожидание предела равно пределу математического ожидания.

Случайная функция X(t) называется **дифференцируемой в точке t_0**, если существует предел

$$\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}=X'(t_0).$$

Этот предел называется **производной случайной функции X(t) в точке t_0**. Если производная существует во всех точках промежутка [a,b], то случайная функции называется **дифференцируемой в этом промежутке**.

Следовательно,

$$X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}=\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}.$$

- **Вопрос 3. Операторы интегрирования и дифференцирования.**

- **Дифференцирование случайной функции.**

Пусть X(t) дифференцируемая случайная функция с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t_1,t_2)$.

Требуется найти характеристики случайной функции Y(t), если

$$X(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

По определению производной

$$Y(t) = X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

Приравняем математическое ожидание обеих частей равенства, затем воспользуемся тем, что математическое ожидание предела равно пределу математического ожидания:

$$M[Y(t)] = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m.}} M[\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}]$$

Используя свойства математического ожидания, получим

$$M[Y(t)] = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t}$$

Отсюда

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt} \qquad (7)$$

Следовательно,

математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от математического ожидания. случайной функции

Найдем корреляционную функцию $K_y(t_1,t_2)$ случайной функции $Y(t)$. Очевидно,

$$\dot{Y}(t) = \frac{d\dot{X}(t)}{dt}$$

поэтому

$$K_y(t_1,t_2) = M[\dot{Y}(t_1)\dot{Y}(t_2)] = M\left[\frac{d\dot{X}(t_1)}{dt_1}\frac{d\dot{X}(t_2)}{dt_2}\right]$$

Так как

$$\frac{d\dot{X}(t_1)}{dt_1}\frac{d\dot{X}(t_2)}{dt_2} = \frac{\partial^2 \dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \qquad (8)$$

то

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\frac{\partial\dot{X}(t_1)}{\partial t_1}\frac{\partial\dot{X}(t_2)}{\partial t_2}\right] = \frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Итак,

корреляционная функция производной от случайной функции равна второй смешанной частной производной корреляционной функции исходной случайной функции X(t).

Пример 4. Случайная функция X(t) имеет характеристики:

$$m_x(t) = 3t^2 + 4t, \qquad K_t(t_1, t_2) = e^{-t_1^2 - t_2^2}$$

Найти характеристики случайной функции

$$Y(t) = 2t^2 \frac{dX(t)}{dt} + 5t$$

Решение.

Так как случайная функция Y(t) есть результат дифференцирования и умножения на неслучайную функцию, примененных к данной случайной функции X(t), то на основании формул (1), (4) и (7) получим

$$m_y(t) = M[Y(t)] = 2t^2 \frac{dm_x(t)}{dt} + 5t$$

Аналогично определяется корреляционная функция $K_y(t_1,t_2)$ по формулам (2) и (8):

$$K_y(t_1,t_2) = f(t_1)f(t_2)\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} =$$
$$= 2t_1^2 2t_2^2 4t_1 t_2 e^{-t_1^2-t_2^2} = 16t_1^3 t_2^3 e^{-t_1^2-t_2^2}$$

Отсюда

$$D_y(t) = K_y(t,t) = 16t^6 e^{-2t^2}$$

Интегрирование случайной функции.

Пусть случайная функция Y(t) связана с X(t) линейным однородным оператором интегрирования

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau \qquad (9)$$

Требуется найти характеристики случайной функции Y(t) при условии, что характеристики случайной функции X(t) известны. Для этой цели равенство (9) представим в виде предела интегральной суммы

$$Y(t) = \underset{\max \Delta t_i \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=1}^{n} X(t_i)\Delta t_i$$

Приравняем математическое ожидание обеих частей равенства, а затем изменим порядок нахождения математического ожидания и предела:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M\left[\underset{\max \Delta t_{i\to 0}}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{n} X(t_i)\Delta t_i\right] =$$

$$= \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} M[X(t_i)]\Delta t_i = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} m_x(t_i)\Delta t_i = \int_0^t m_x(t)\,dt$$

Итак,

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)\,d\tau \qquad (10)$$

Найдем корреляционную функцию $K_y(t_1,t_2)$.

Очевидно,

$$\dot{Y}(t) = \int_0^t \dot{X}(\tau)d\tau$$

Поэтому

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\dot{Y}(t_1)\dot{Y}(t_2)\right] = M\int_0^{t_1} \dot{X}(\tau_1)d\tau_1 \int_0^{t_2} \dot{X}(\tau_2)d\tau_2 =$$

$$= M\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \dot{X}(\tau_1)\dot{X}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right] = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} M\left[\dot{X}(\tau_1)\dot{X}(\tau_2)\right]d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

Таким образом,

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (11)$$

Т.е.

корреляционная функция интеграла от случайной функции равна двойному интегралу от корреляционной функции исходной случайной функции.

Пример 5. На вход интегрирующего механизма поступает случайная функция X(t) с $m_x(t)=3t^2-7t+8$, $K_x(t_1,t_2)=\cos\omega t_1 \cos\omega t_2$. Найти характеристики случайной функции Y(t).

Решение.

Воспользуемся формулами (10) и (11):

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)d\tau = \int_0^t (3\tau^2 - 7\tau + 8)d\tau = t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 8t;$$

$$K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \cos\omega\tau_1 \cos\omega\tau_2 d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_0^{t_1} \cos\omega\tau_1 d\tau_1 \int_0^{t_2} \cos\omega\tau_2 d\tau_2 = \frac{1}{\omega\omega}\sin\omega t_1 \sin\omega t_2$$

Отсюда

$$D_y(t) = K_y(t,t) = \frac{1}{\omega^2}\sin^2\omega t$$

Пример 6. Случайная функция X(t) имеет характеристики:

$m_x(t)=6t-4$, $K_x(t_1,t_2)=t_1t_2$.

Найти характеристики случайной функции

$$Y(t) = \frac{1}{t^3}\int_0^t X(\tau)d\tau - 8t + 5$$

Решение.

Так как случайная функция Y(t) есть результат интегрирования и умножения на неслучайную функцию с прибавлением неслучайной функции, то

$$m_y(t) = \frac{1}{t^3}\int_0^1 m_x(\tau)d\tau - 8t + 5 = \frac{1}{t^3}\int_0^t (6\tau - 4)d\tau - 8t + 5 =$$

$$= \frac{1}{t^3}(3t^2 - 4t) - 8t + 5 = \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2} - 8t + 5$$

$$K_y(t) = \frac{1}{t_1^3}\frac{1}{t_2^3}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1\tau_2) = \frac{1}{t_1^3}\frac{1}{t_2^3}\int_0^{t_1}\tau_1 d\tau_1 \int_0^{t_2}\tau_2 d\tau_2 =$$

$$= \frac{1}{t_1^3 t_2^3}\frac{1}{2}t_1^2\frac{1}{2}t_2^2 = \frac{1}{4t_1 t_2}$$

Отсюда

$$D_y(t) = K_y(t,t) = \frac{1}{4t^2}$$

Задание на самоподготовку

- 1. Изучить материал лекции.
- 2. Ознакомиться с литературой по теме занятия.
- 3. Подготовиться к практическому занятию.