

## **Лекция 12**

### **Статистический анализ зависимостей между гидрологическими переменными**

**Множественная линейная корреляция.  
Оценка точности уравнения  
множественной линейной корреляции**

*(Ахметов С.К.)*

## *Множественная линейная корреляция*

На практике возможны случаи, когда **СВ**  $Y$  зависит сразу от ряда **СВ**  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Уравнение регрессии в этом случае будет иметь вид

$$(y - y_{cp.}) = a_1 (x_1 - x_{1,cp.}) + a_2 (x_2 - x_{2,cp.}) + \dots + a_m (x_m - x_{m,cp.})$$

$a_1, a_2, \dots, a_m$  - коэффициенты регрессии;

$y_{cp.}, x_{1,cp.}, x_{2,cp.}, \dots, x_{m,cp.}$  - средние значения соответственно предиктанта и предикторов;

$m$  - число предикторов

Т.о., задача сводится к определению значений  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . При небольшом числе предикторов, задачу можно решить методом Крамера. В этом случае нужно рассчитать главный определитель  $D$

## Расчет главного определителя

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{0,1} & r_{0,2} & r_{0,3} & \dots & r_{0,j} & \dots & r_{0,m} \\ r_{1,0} & 1 & r_{1,2} & r_{1,3} & \dots & r_{1,j} & \dots & r_{1,m} \\ r_{2,0} & r_{2,1} & 1 & r_{2,3} & \dots & r_{2,j} & \dots & r_{2,m} \\ r_{3,0} & r_{3,1} & r_{3,2} & 1 & \dots & r_{3,j} & \dots & r_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i,0} & r_{i,1} & r_{i,2} & r_{i,3} & \dots & r_{i,j} & \dots & r_{i,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,0} & r_{m,1} & r_{m,2} & r_{m,3} & \dots & r_{m,j} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$r_{i,j}$  – парные коэффициенты корреляции.

Например,  $r_{0,3}$  – коэффициент корреляции между предиктантом и третьим предиктором,  $r_{2,1}$  – коэффициент корреляции между вторым и первым предикторами. При этом  $r_{i,j} = r_{j,i}$ , а на главной диагонали  $r_{0,0} = r_{1,1} = r_{2,2} = \dots = r_{m,m} = 1$ .

## Расчет коэффициентов регрессии

$$a_j = -(-1)^j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x,j}} \frac{D_{0,j}}{D_{0,0}}$$

$\sigma_y$  – среднее квадратическое отклонение предиктанта

$\sigma_{x,j}$  – среднее квадратическое отклонение  $j$  – того предиктора

$D_{0,0}$  – определитель, получаемой из главного определителя системы путем вычеркивания из него нулевой строки и нулевого столбца

$D_{0,j}$  – определитель, получаемой из главного определителя системы путем вычеркивания из него нулевой строки и  $j$  – того столбца

## *Правила расчета определителя*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

## *Если число переменных равно трем*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{0,1} & r_{0,2} \\ r_{1,0} & 1 & r_{1,2} \\ r_{2,0} & r_{2,1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_{0,0} = \begin{vmatrix} 1 & r_{1,2} \\ r_{2,1} & 1 \end{vmatrix} = 1 - r_{2,1}r_{1,2} = 1 - r_{1,2}^2$$

$$D_{0,1} = \begin{vmatrix} r_{1,0} & r_{1,2} \\ r_{2,0} & 1 \end{vmatrix} = r_{1,0} - r_{2,0}r_{1,2}$$

$$D_{0,2} = \begin{vmatrix} r_{1,0} & 1 \\ r_{2,0} & r_{2,1} \end{vmatrix} = r_{1,0}r_{2,1} - r_{2,0}$$

$$a_1 = + \frac{\sigma_y}{\sigma_{x,1}} \frac{(r_{1,0} - r_{2,0}r_{1,2})}{1 - r_{1,2}^2}$$

$$a_2 = - \frac{\sigma_y}{\sigma_{x,2}} \frac{(r_{1,0}r_{2,1} - r_{2,0})}{1 - r_{1,2}^2}$$

# Оценка точности уравнения множественной линейной регрессии

□ Сводный коэффициент корреляции можно вычислить двумя способами:

1. По формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_{0,0}}}$$

2. Как парный коэффициент корреляции между фактическими значениями предиктанта и значениями предиктанта, полученными по уравнению множественной линейной регрессии при тех же значениях аргументов.

В отличие от парного коэффициента корреляции, который может меняться от -1 до +1, коэффициент множественной корреляции меняется от 0 до +1.

## Оценка точности уравнения множественной линейной регрессии (2)

□ Стандартная ошибка коэффициента множественной корреляции определяется по формуле

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}}$$

***n*** – длина анализируемых рядов

***m*** – число предикторов

□ Стандартную ошибку уравнения множественной линейной регрессии можно оценить по формуле

$$\sigma_{Y(X)} \approx \sigma_y^* \sqrt{1 - R^2}$$

□ Стандартная ошибка ***j***–того коэффициента регрессии можно определить по формуле

$\Delta_{jj}$  – минор определителя ***D*<sub>0,0</sub>**

$$\sigma_{a_j} = \frac{\sigma_y^*}{\sigma_{x_j}^*} \sqrt{\frac{(1 - R^2) \Delta_{j,j}}{(n - m - 1) D_{0,0}}}$$



## *Условия приемлемости уравнения регрессии*

1.  $R \geq 0,7$

2.  $(R/\sigma_R) \geq 2$

3.  $(a_j/\sigma_{a,j}) \geq 2$

$n \geq 10$  (при одном предикторе)

$n \geq 25-30$  (при двух предикторах)

$n \geq 50-60$  (при четырех предикторах)

*Третье условие* считается выполненным, если оно выполняется для каждого коэффициента регрессии в отдельности

***СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!***