Урок обобщения и систематизации знаний и способов деятельности по теме «Степень. Свойства степени»

Определение степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n\ \text{раз}}$$

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.

Определение степени с отрицательным целым показателем:

Если n – натуральное число и $a\neq 0$, b≠0, то:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{в}\right)^{-n} = \left(\frac{в}{a}\right)^{n}; \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = (a)^n; \qquad a^0 = 1.$$

Определение степени с дробным показателем:

Если n –натуральное число, m – целое число, то при $a>0$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Свойства степени:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$(aв)^n = a^n в^n$$

$$\left(\frac{a}{в}\right)^n = \left(\frac{a^n}{в^n}\right)$$

Выбери верный ответ:

2^3	$а) 4;\ б) 8;\ в) 16$
$\left(1\frac{1}{2}\right)^2$	$а) 2\frac{1}{4};\ б) 1\frac{1}{4};\ в) \frac{1}{4}$
$(-1)^4$	$а) 4;\ б) -1;\ в) 1$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$	$а) \frac{1}{81};\ б) 81;\ в) -\frac{1}{81}$
$(-0{,}1)^{-3}$	$а) -1000;\ б) -0{,}001;\ в) 0{,}001$
$8^{\frac{2}{3}}$	$а) 2;\ б) 4;\ в) \frac{1}{4}$
$25^{-\frac{3}{2}}$	$а) \frac{1}{125};\ б) -\frac{1}{125};\ в) 125$
$(-16)^0$	$а) 16;\ б) 0;\ в) 1$

Коды ответов:

б; а; в; б; а; б; а; в.

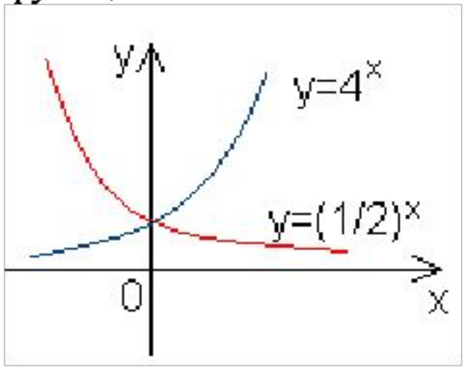
Вычисли значение выражения

$6^{13}\cdot 6^{-15}$	$а)\frac{1}{36}; б)36; в)-36$
$0{,}5^{-14}:0{,}5^{-16}$	$а)25; б)0{,}25; в)-0{,}25$
$\left(3^{-2}\right)^{-1}$	$а)9; б)\frac{1}{9}; в)\frac{1}{27}$
$\left(2^{-6}\right)^{-2}\cdot 2^{-14}$	$а)4; б)-\frac{1}{4}; в)\frac{1}{4}$
$\frac{7^{-7}\cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$	$а)\frac{1}{49}; б)49; в)-\frac{1}{49}$
$16\cdot\left(2^{-3}\right)^{2}$	$а)4; б)\frac{1}{4}; в)\frac{1}{2}$
$2^{-5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot 8^{2}$	$а)4; б)-\frac{1}{4}; в)\frac{1}{4}$
$\frac{3^{-2}\cdot 5^{-3}}{15^{-3}}$	$а)3; б)\frac{1}{3}; в)-\frac{1}{3}$

Коды ответов:

а; б; а; в; а; б; в; а.

Обобщение понятия «степень»

n – показатель степени a^n *a* — основание степени	$n \in N$	$n \in Z$	$n \in \mathbf{Q}$	*n*- переменная
$a \in N$	$4^4 =$	$4^{-3} =$	$4^{\frac{1}{2}} =$	$y=4^x$ - показательная функция
$a \in Z$	$(-8)^2 =$	$(-8)^{-1} =$	$(-8)^{\frac{1}{3}} =$	
$a \in \mathbf{Q}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 =$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} =$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$	
a- переменная	$a^3 = aaa$ $a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n\ раз}$ $n > 1$	$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0,\ n \neq 0$	$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0, n \in N,$ $m \in Z$	$y=a^x$, где $a > 0$ – *показательная функция*

Реши, если силён

Задания на "3" балла

1. Вычисли:

$$1)\ -4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+(0{,}2)^{-3}\quad =-4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=-4\cdot\frac{25}{4}+5^{3}=-25+125=100$$

$$2)\ \left(10^{-10}\cdot 100^{6}\right)^{-1}\quad =\left(10^{-10}\cdot\left(10^{2}\right)^{6}\right)^{-1}=\left(10^{-10}\cdot 10^{12}\right)^{-1}=\left(10^{2}\right)^{-1}=10^{-2}=0{,}01$$

$$3)\ \left(c^{6}c^{-3}\right)^{-1}\ \textit{при}\ \ C=\frac{1}{3}$$

$$\left(c^{6}c^{-3}\right)^{-1}=\left(c^{3}\right)^{-1}=c^{-3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=3^{3}=27$$

Задания на «4» балла

Расположите в порядке возрастания числа:

$\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$; $(1,4)^{-2}$ *и* $1,4$;

Решение:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^{2} = (1,4)^2 = 1,96;$$

$$(1,4)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{2} < 1;$$

Ответ: $(1,4)^{-2}$; $1,4$; $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$.

2)Упростите выражение:

$$\left(a^{-2}-в^{-2}\right)\left(в^{-1}-a^{-1}\right)^{-1}$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{в^2}\right)\left(\frac{1}{в}-\frac{1}{a}\right)^{-1}=\frac{в^2-a^2}{a^2в^2}\cdot\left(\frac{a-в}{aв}\right)^{-1}=\frac{(в-a)(в+a)}{a^2в^2}\cdot\frac{aв}{a-в}=$$

$$=-\frac{a+в}{aв}$$

3)Представьте выражение в виде степени:

$$\frac{x^{-6}+x^{-4}+x^{-2}}{x^{2}+x^{4}+x^{6}};$$

Решение:

$$\frac{x^{-6}\left(1+x^{2}+x^{4}\right)}{x^{2}\left(1+x^{2}+x^{4}\right)}=\frac{x^{-6}}{x^{2}}=x^{-8}$$

4)Упростите выражение:

$$\frac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2\cdot 5^{n}};$$

Решение:

$$\frac{5^{n-1}\left(5^{2}-1\right)}{2\cdot 5^{n}}=\frac{5^{n-1}\cdot 24}{2\cdot 5^{n}}=\frac{1\cdot 12}{1\cdot 5}=\frac{12}{5}=2{,}4$$

Задания на «5» баллов

1)Упростите: $\dfrac{8\cdot 100^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}}$;

Решение:

$$\frac{2^3\cdot(25\cdot 4)^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}}=\frac{2^3\cdot\left(5^2\cdot 2^2\right)^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}}=\frac{2^{2n+3}\cdot 5^{2n}}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}}=\frac{2^2\cdot 5^2}{1}=100$$

2)Сравните: $\left(\dfrac{0{,}138}{604{,}2}\right)^7$ *и* $\left(\dfrac{60{,}42}{0{,}0138}\right)^{-8}$

Решение:

$$\left(\frac{60{,}42}{0{,}0138}\right)^{-8}=\left(\frac{0{,}0138}{60{,}42}\right)^{-8}=\left(\frac{0{,}0138\cdot 10}{60{,}42\cdot 10}\right)^{8}=\left(\frac{0{,}138}{604{,}2}\right)^{8}$$

Основание степени $\dfrac{0{,}138}{604{,}2}<1$, поэтому по свойству показательной функции, если $a<1$, то

при n<m $a^n > a^m$.

Так как 7<8 и $a<1$

$$\left(\frac{0{,}138}{604{,}2}\right)^{7}>\left(\frac{0{,}138}{604{,}2}\right)^{8} \text{ и } \left(\frac{0{,}138}{604{,}2}\right)^{7}>\left(\frac{60{,}42}{0{,}0138}\right)^{-8}$$

Вычислите значение числового выражения:

$$9\left(\left(2\sqrt{54}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(3\sqrt{0,375}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-4}$$

Решение: $9\left(\left(\sqrt{4\cdot 54}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{9\cdot 0,375}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-4}=9\left(\sqrt{216^{\frac{1}{3}}}-\sqrt{\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{-4}=$

$=9\left(\sqrt{\left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}}-\sqrt{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{-4}=9\left(\sqrt{6}-\sqrt{1,5}\right)^{-4}=9\left(2\sqrt{1,5}-\sqrt{1,5}\right)^{-4}=$

$=9\left(1,5^{\frac{1}{2}}\right)^{-4}=9\cdot 1,5^{-2}=9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=9\cdot\frac{4}{9}=4$

Упростите выражение и найдите его значение при заданном значении переменной:

$$\left(1-d^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+1\right) \text{ при } d=3$$

Решение:

$$\left(1-d^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(1-d^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot d^{\frac{1}{4}}\cdot\left(d^{\frac{1}{4}}+1\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+1\right)=$$

$$=\left(d^{\frac{1}{4}}-d^{-\frac{1}{4}}d^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{4}}+1\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+1\right)=\left(d^{\frac{1}{4}}-1\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{4}}+1\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+1\right)=$$

$$=\left(d^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(d^{\frac{1}{2}}+1\right)=d-1$$

Если $d=3$, то $d-1=3-1=2$

Ответ: 2

Найдите корни уравнения:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 27$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$2x - 1 = -3$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

$$\mathit{Ответ}: -1.$$

Спасибо за внимание.

Автор: Микрюкова Е. А.,
учитель школы № 49 г. Кирова.
2009 г.