Урюпинский филиал ГБОУ СПО «Волгоградский медицинский колледж»

Степенная функция, её свойства и график

Преподаватель математики и информатики Багрова Г.Г.

Вы знакомы с функциями $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$ и т. д.

Все эти функции являются частными случаями степенной функции,

т. е. функции $y = x^p$, где p - заданное действительное число.

Виды степенной функции

1. **Показатель $p=2n$ - четное натуральное число.**

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где **n - натуральное число**, обладает следующими **свойствами:**

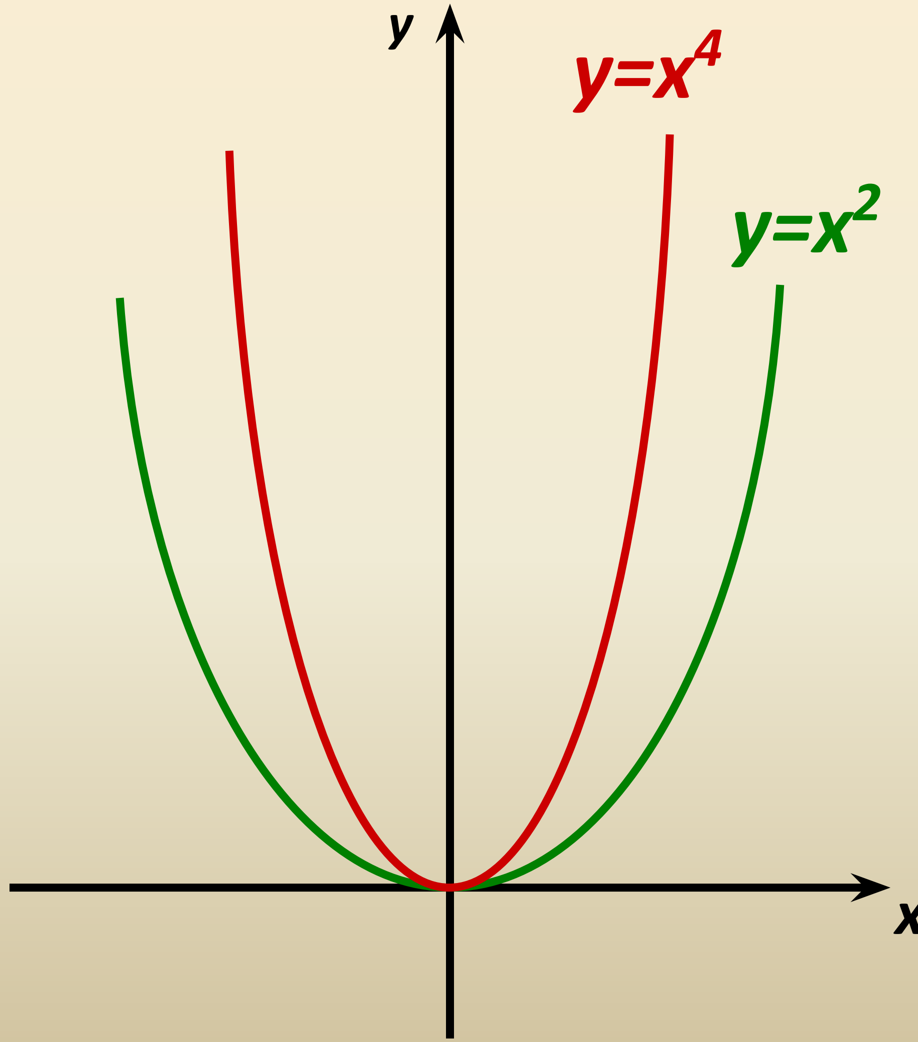
- область определения - все действительные числа, т. е. множество R ;
- множество значений - неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$;
- функция $y=x^{2n}$ **четная**, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
- функция является убывающей на промежутке $x \geq 0$ и возрастающей на промежутке $x \leq 0$.

График функции $y = x^P$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^4$ (рис. 1).

p - чётное число

$$y = x^{2n}$$

$$p=2n$$



2. Показатель $p=2n-1$ - нечетное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{2n-1}$, где $2n-1$ - натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R;
- множество значений - множество R;

Функция $y=x^{2n-1}$ ***нечетная***, так как

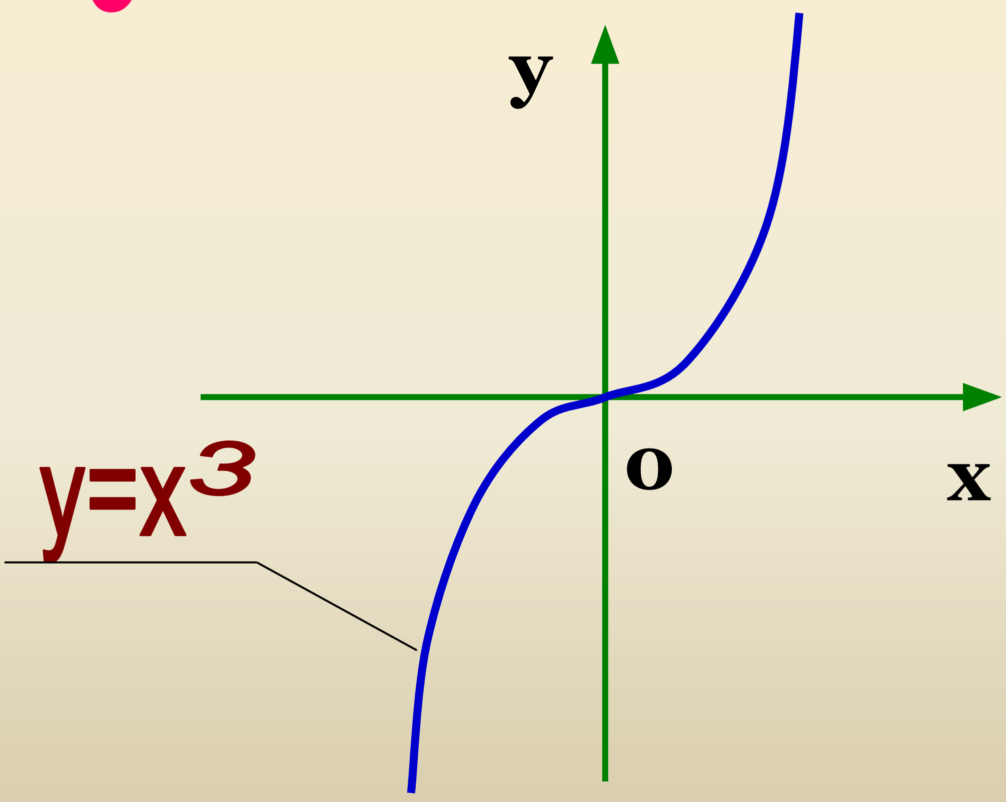
$$(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1};$$

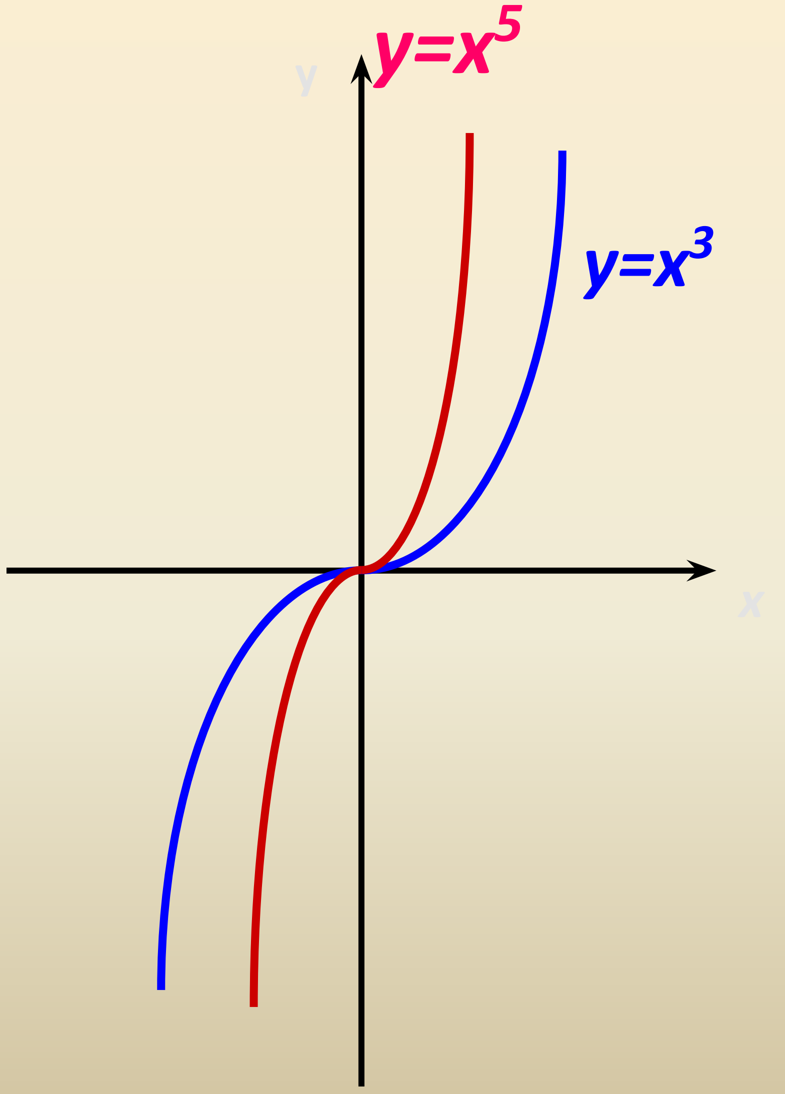
- функция является ***возрастающей*** на всей действительной оси.

График функции $y=x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^3$(рис. 2).

p - нечётное число   p=2n-1

$$y = x^{2n-1}$$





3. Показатель p = - 2n, где n - натуральное число.

В этом случае степенная функция $y=x^{2n}$ обладает следующими **свойствами:**

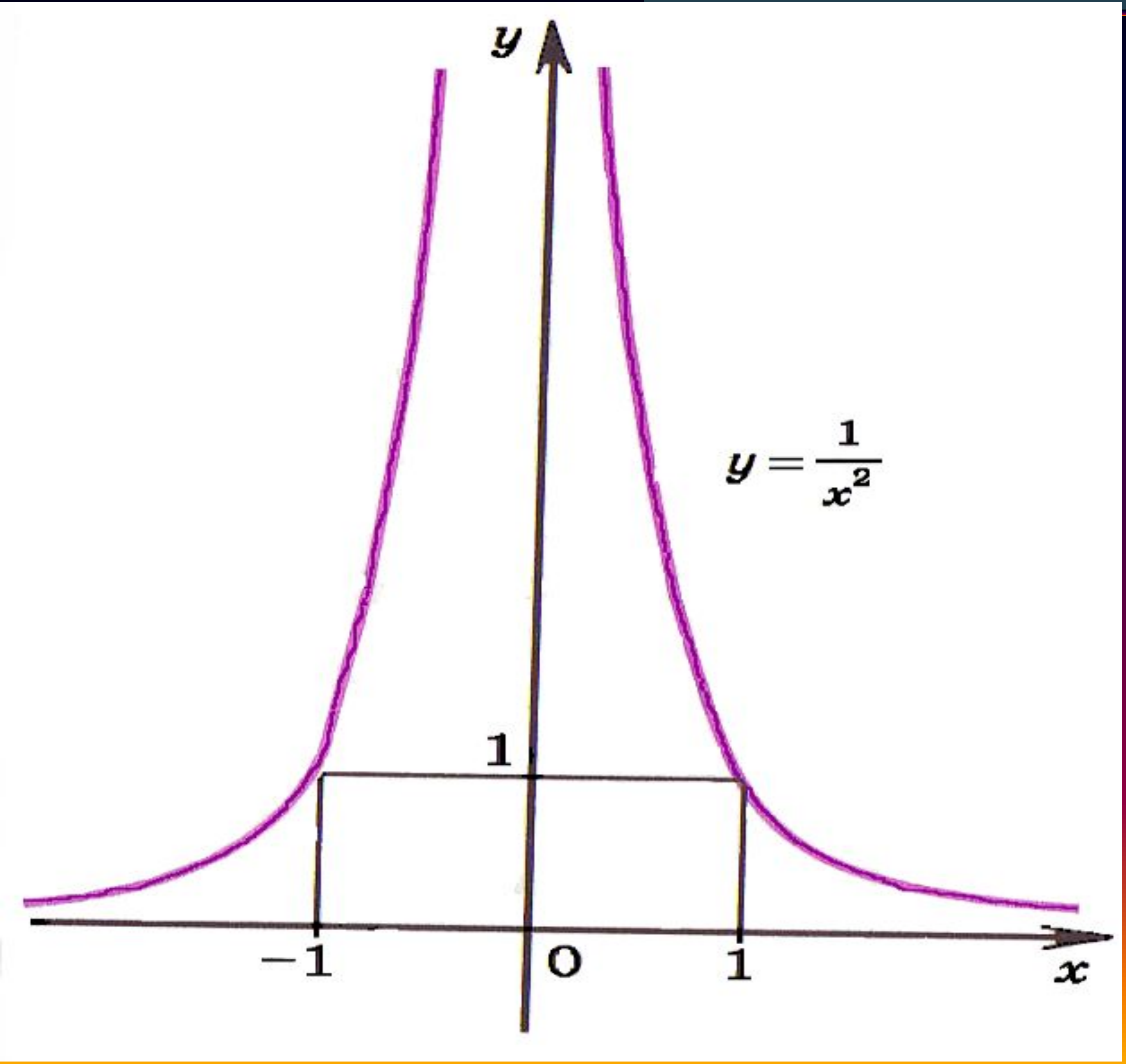
- **область определения** - множество R, кроме $x = 0$;

- **множество значений** - положительные числа $y>0$;

- Функция $y=x^{2n}$ - **четная**, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;

- функция является ***возрастающей*** на промежутке $x<0$ и ***убывающей*** на промежутке $x>0$.

График функции $y=x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^{-2}$ (рис.3).


y
$y = \frac{1}{x^2}$
1
−1
O
1
x

4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n - натуральное число.

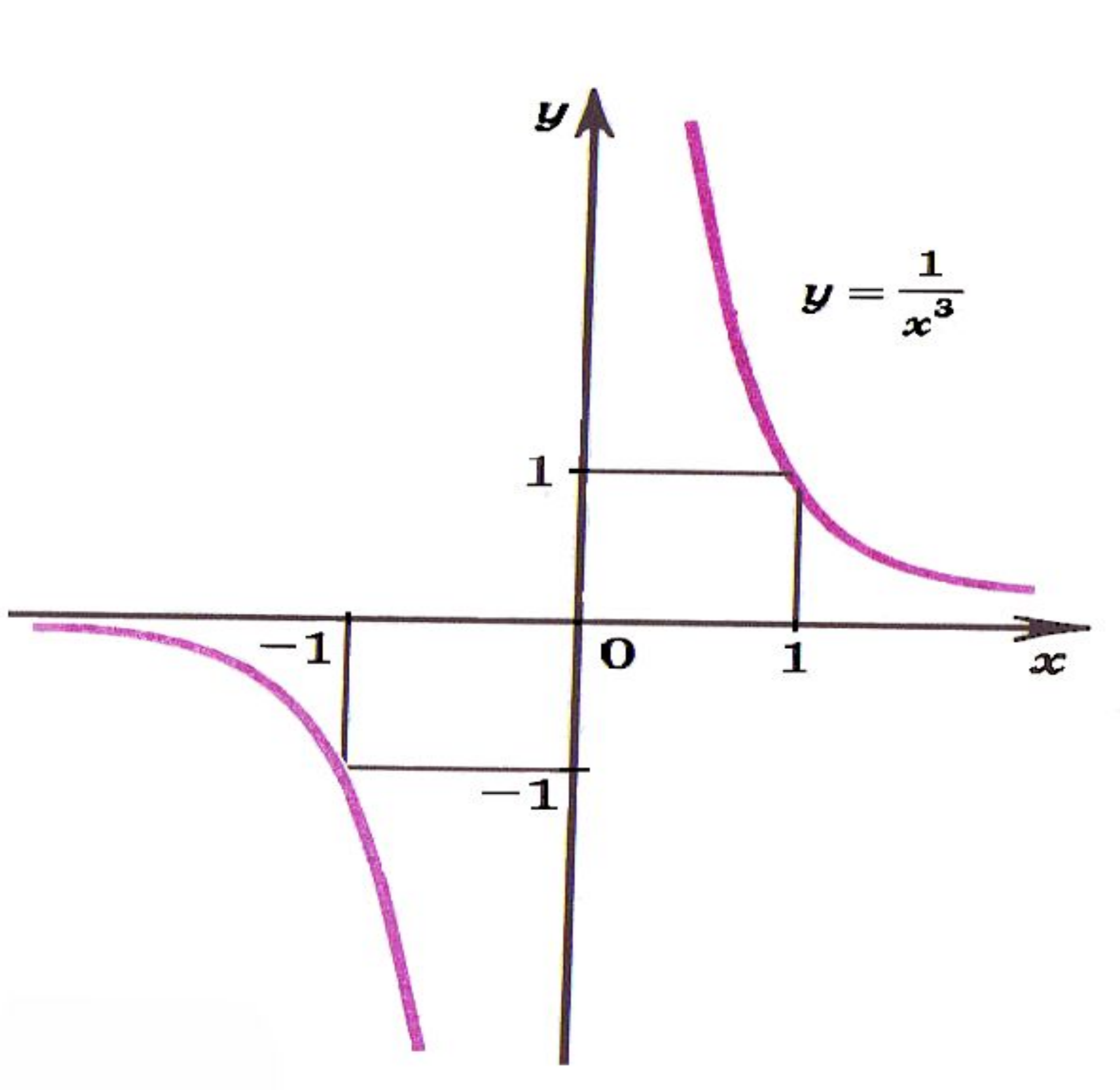
В этом случае степенная функция $y=x^{-(2n-1)}$ обладает следующими **свойствами:**

- **область определения** - множество R, кроме $x=0$;
- **множество значений** - множество R, кроме $y=0$;
- функция ***нечетная***, так как

$$(-x)^{-(2n-1)} = x^{-(2n-1)};$$

- функция является ***убывающей*** на промежутках $x<0$ и $x>0$.

График функции $y=x^{-(2n-1)}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^3$ (рис. 4).



y
$y = \frac{1}{x^3}$
1
−1
0
1
−1
x

5. Показатель p - положительное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y=x^p$ обладает следующими **свойствами:**

- **область определения - неотрицательные числа** x;
- **множество значений** - **неотрицательные числа** y;
- функция является ***возрастающей*** на промежутке **(*x*; ∞).**

График функции $y=x^p$, где **p - положительное нецелое** число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^p$ (при $0<p<1$) или как, например, график функции $y=x^p$ (при $p>1$) (рис.5 *а, б*)

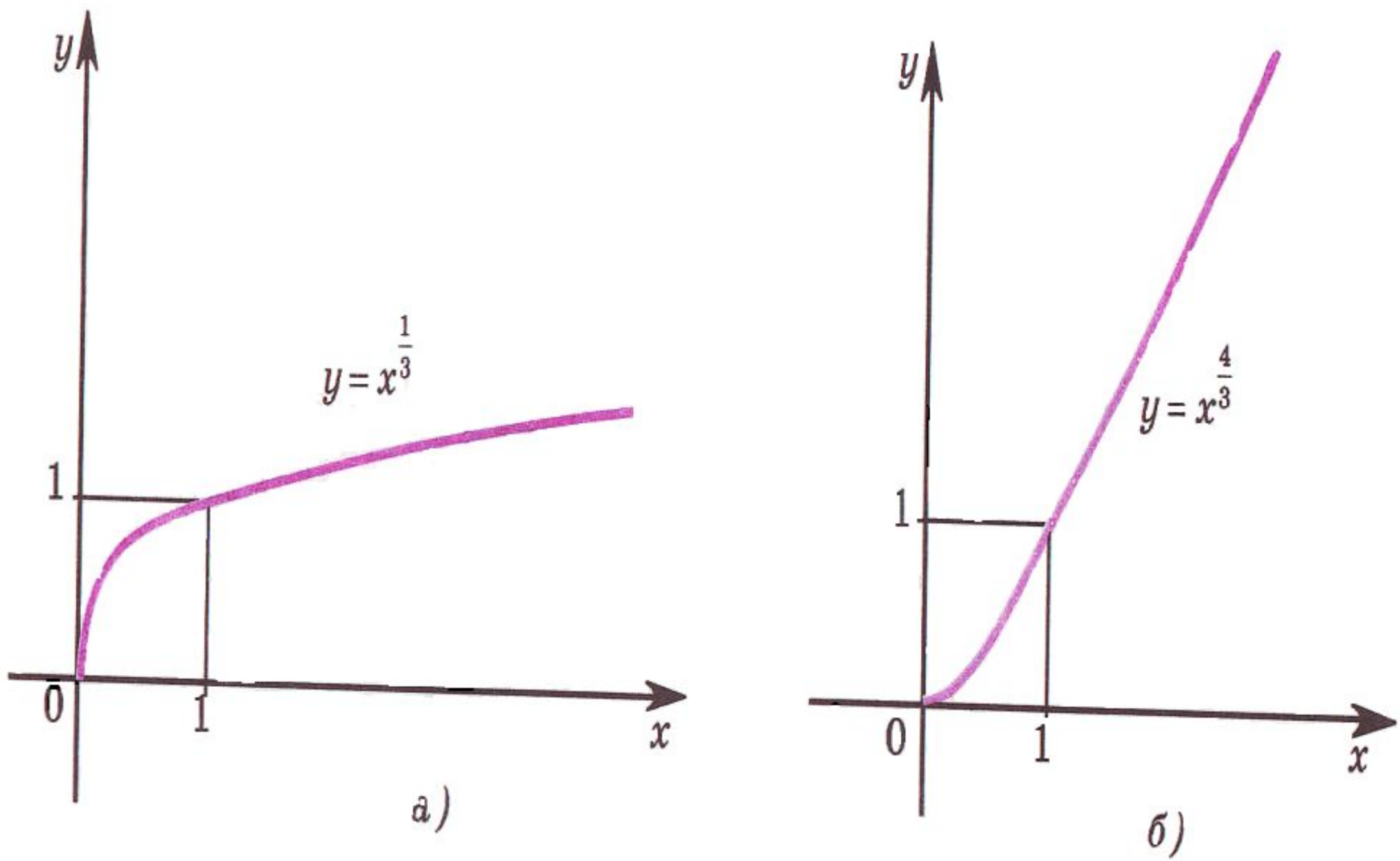


Рис.5

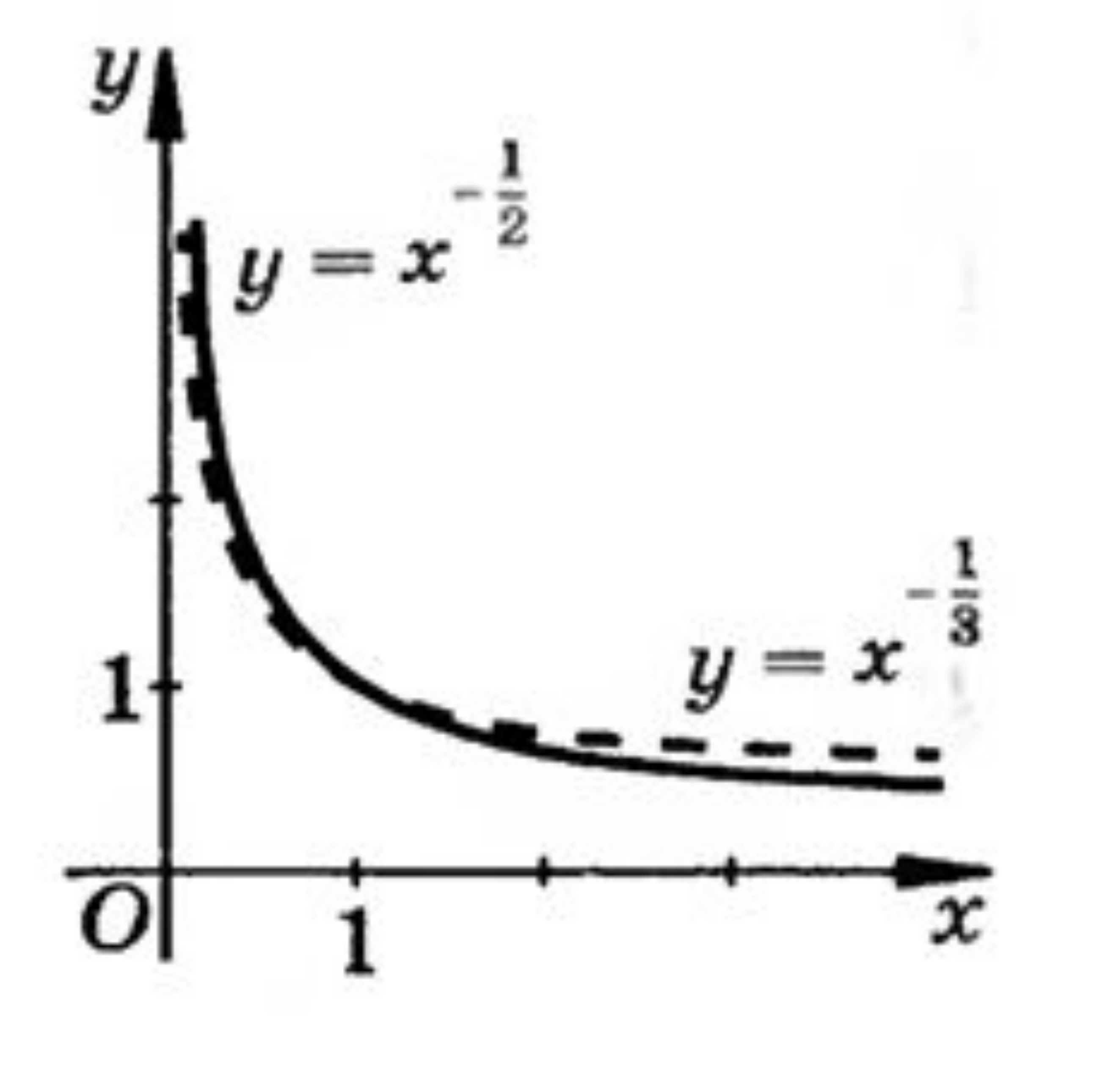
6. Показатель p - отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y=x^p$ обладает следующими **свойствами:**

- **область определения** – **положительные** числа $x>0$;
- **множество значений** – положительные числа $y>0$;
- функция является **убывающей** на промежутке $x>0$.

Данный случай проиллюстрирован графиками

$$y = x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} \text{ и } y = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$


y
$y = x^{-\frac{1}{2}}$
$y = x^{-\frac{1}{3}}$
1
O
1
x

Задача 1.

Изобразить схематически график функции и найти её область определения и множество значений:

1) $y = x^{\frac{3}{8}}$; 2) $y = x^{-\frac{1}{5}}$.

Решение.

1) $y = x^{\frac{3}{8}}$, $p = \frac{3}{8}$, $0 < p < 1$, p — нецелое число. Область определения $x \geqslant 0$. Множество значений $y \geqslant 0$ (рис. 14).

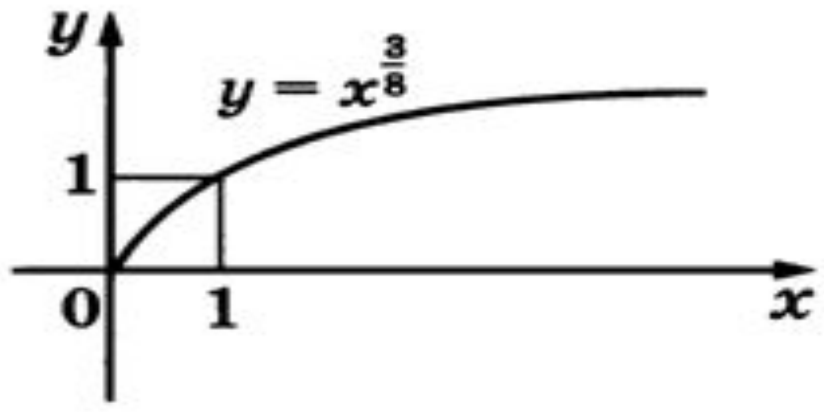


Рис. 14

2) $y = x^{-\frac{1}{5}}$, $p < 0$, p — нецелое число. Область определения $x > 0$. Множество значений $y > 0$ (рис. 15).

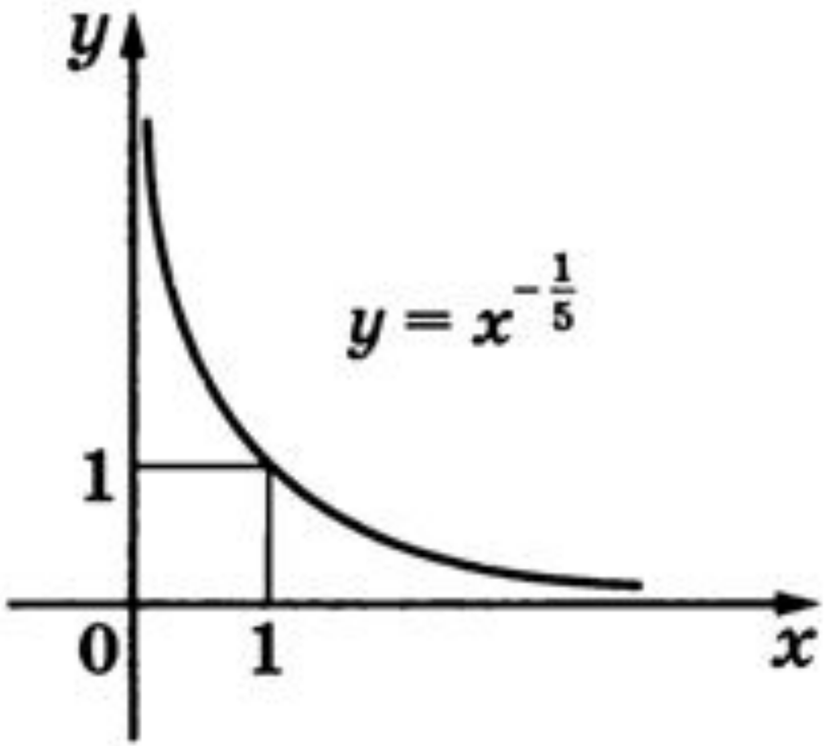


Рис. 15

УПРАЖНЕНИЯ

Изобразить схематически график функции и указать ее область определения и множество значений:

1) $y = x^6$; 2) $y = x^5$; 3) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

4) $y = x^{-2}$; 5) $y = x^{-3}$; 6) $y = x^{\frac{1}{3}}$.