Степенные ряды

Лекции12, 13, 14

Функциональные ряды

Ряд, члены которого являются функциями, называется *функциональным* и обозначается

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

Если при $x = x_0$ ряд сходится, то x_0 называется точкой сходимости функционального ряда.

Определение. Множество значений *x*, для которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда.

Пример функционального ряда

Рассмотрим геометрическую прогрессию со знаменателем *x*:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots.$$

Геометрическая прогрессия сходится, если ее знаменатель $|x| < 1$. Тогда она имеет сумму $S = \dfrac{1}{1-x}$, которая очевидно является функцией от *x.*

Степенные ряды

Определение. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

называется степенным по степеням x .

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x - x_0\right) + a_2\left(x - x_0\right)^2 + \ldots + a_n\left(x - x_0\right)^n + \ldots$$

является степенным по степеням $\left(x - x_0\right)$.

Интервал сходимости степенного ряда

Для любого степенного ряда существует конечное неотрицательное число *R* - радиус сходимости - такое, что если $R > 0$, то при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. Если же $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь в точке *x*=0.

Нахождение интервала сходимости по признаку Даламбера

Составим ряд из абсолютных величин членов степенного ряда и найдем интервал, в котором он будет сходиться, Тогда в этом интервале данный степенной ряд будет сходиться абсолютно. Согласно признаку Даламбера , если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x^n|}<1$$

,то степенной ряд абсолютно сходится для всех x, удовлетворяющих этому условию.

Продолжение

В этом случае ряд будет сходиться внутри интервала (-*R*,*R*),где *R*-это радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

За пределами этого интервала ряд будет расходиться, а на концах интервала, где

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = 1$$

, требуется дополнительное исследование.

Примеры

Найти интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} \quad .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x^{n+1}\right|(2n+1)}{(2n+3)\cdot|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{2n+1}{2n+3} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n} = |x| < 1$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале (-1,1).

Примеры

Положим $x = 1$. Тогда получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. Этот ряд расходится

(сравните его с гармоническим рядом).

Полагая $x = -1$, имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, который сходится условно в силу теоремы Лейбница.

Итак, степенной ряд сходится в промежутке [-1,1).

Примеры

Найти интервал сходимости степенного

ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Здесь $u_n=\frac{x^n}{n!}=\frac{x^n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}$,

=

$u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{x^{n+1}}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}$.Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}$$

ВТУЭС

Продолжение

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 \quad .$$

Но 0<1 всегда, т.е. независимо от x. Это означает, что степенной ряд сходится независимо от x, т.е. на всей числовой прямой.

Итак, интервал сходимости ряда - это промежуток $\left(-\infty, \infty\right)$.

Пример

Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\,(n+1)\,|x|}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1)$$

Этот предел может быть меньше единицы, если только x=0 (иначе он будет равен бесконечности). Это означает, что степенной ряд сходится лишь в точке x=0.

Свойства степенных рядов. Непрерывность суммы ряда

1. Сумма степенного ряда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

является непрерывной функцией в каждой точке интервала сходимости этого ряда.

Например,

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

непрерывна , если $|x| < 1$.

Почленное дифференцирование

2. Ряд, полученный почленным дифференцированием степенного ряда, является степенным рядом с тем же интервалом сходимости, что и данный ряд, причем :если

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots ,$$

то

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

Почленное интегрирование

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом промежутке, целиком входящем в интервал сходимости степенного ряда, при этом

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} a_0 dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_1 x dx + \ldots + \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx + \ldots$$

где $(\alpha, \beta) \subset (-R, R)$.

Разложение функций в степенные ряды

Определения

Определение. Если бесконечно дифференцируемая функция является суммой степенного ряда, то говорят, что она разлагается в степенной ряд .

Опр. Рядом Тейлора функции *f(x)* называется ряд, коэффициенты которого определяются

по формулам $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad .$$

Степенной ряд как ряд Тейлора

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

то ряд справа есть ее ряд Тейлора.

Короче: если функция представлена в виде степенного ряда, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

Представление функции ее рядом Тейлора единственно.

Формула Тейлора

Рассмотрим *n*-ю частичную сумму ряда Тейлора:

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Этот многочлен называется многочленом Тейлора функции $f(x)$.

Разность $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ называется остаточным членом ряда Тейлора.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \textit{где}\ \ c \in (x_0, x)$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Условия сходимости ряда Тейлора к функции y=f(x)

Для того чтобы функцию можно было разложить в ряд Тейлора на интервале(-R,R),необходимо и достаточно, чтобы функция на этом интервале имела производные всех порядков и чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при всех $x \in (-R, R)$ *при* $\mathrm{n} \to \infty$

ВГУЭС

Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора

Если функция f(x) на интервале (-R,R) бесконечно дифференцируема и ее производные равномерно ограничены в совокупности, т. е. существует такая константа М, что для всех $x \in (-R, R)$ *выполняется условие* $\left| f^{(n)}(x) \right| \le M$ *при n=0,1,2,…, то функцию можно разложить в ряд Тейлора на этом интервале.*

Разложение $f(x) = e^x$

Все производные этой функции совпадают с самой функцией, а в точке x=0 они равны 1. Составим для функции формально ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Этот ряд, очевидно, сходится на всей числовой оси. Но все производные функции равномерно ограничены, т. к. $f^{(n+1)}(c) = e^c < e^R$, где R-любое число из интервала сходимости. Поэтому этот ряд сходится именно к функции e^x.

Разложение в ряд синуса.

Вычислим производные синуса:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

$$f'''(x) = \cos(x + 2\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$$

....

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = 1,$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

....

$$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$$

....

Продолжение

Ясно, что все производные синуса не превосходят по модулю единицу. Так что запишем ряд, который будет разложением синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + .. = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

при этом видно, что этот ряд сходится на всей числовой оси.

ВГУЭС

Разложения некоторых функций в ряд Тейлора

При решении задач удобно пользоваться разложениями:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, \infty)$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Продолжение

Геометрическую прогрессию мы получили выше:

4. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, |x| < 1$$

Интегрируя по x обе части равенства, получим логарифмический ряд:

5. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

Биномиальный ряд

6. $$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

7. $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$

Биномиальный, логарифмический ряды и ряд для арктангенса сходятся в интервале (-1,1).

Пример

Разложить в ряд Тейлора по степеням х функцию $f(x)=\sqrt[3]{27-x}$

Решение. Зная разложение функции в биномиальный ряд, сходящийся на интервале (-1,1), преобразуем данную функцию так, чтобы воспользоваться биномиальным рядом.

$$\sqrt[3]{27-x}=\sqrt[3]{27\left(1-\frac{x}{27}\right)}=3\sqrt[3]{1-\frac{x}{27}}=3\left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3\left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{27}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x}{27}\right)^{2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{27}\right)^{n}+\ldots\right]$$, где $$\left|\frac{x}{27}\right|<1$$

Применение степенных рядов

Приближенное вычисление интегралов

Разложения 1–7 позволяют, используя соответствующее разложение, вычислять приближенно значения функций, интегралы, приближенно интегрировать дифференциальные уравнения.

Пример . С помощью степенного ряда вычислить с точностью до 0,0001

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

Решение

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \ldots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots\right)dx =$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!}dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!}dx + \int_0^1 \frac{x^8}{4!}dx - \ldots =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{2\cdot 5}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{6\cdot 7}\Big|_0^1 + \frac{x^9}{24\cdot 9}\Big|_0^1 - .. =$$

Продолжение

$$= x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{2\cdot 5}\Big|_0^1 - \frac{x^7}{6\cdot 7}\Big|_0^1 + \frac{x^9}{24\cdot 9}\Big|_0^1 - .. =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + ..$$

Так как получившийся ряд является знакочередующимся, то сумма знакочередующегося ряда не превосходит первого члена такого ряда. Ясно, что часть ряда, которую в задаче следует отбросить, также является знакочередующимся рядом и его сумма не превзойдет модуля первого отброшенного члена ряда.

Таким образом, первый отброшенный член ряда должен быть меньше заданной погрешности, т.е. 0,0001.

Продолжение

Вычислив еще несколько членов ряда

$$-\frac{1}{1320},-\frac{1}{9360},-\frac{1}{75600}$$

видим, что $\frac{1}{75600} \square 0{,}0001$

Отбросив этот и следующие за ним члены ряда, получим:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360} = 0{,}7468$$

Приближенное вычисление значений функций

Вычислить $\sqrt[3]{10}$ с точностью до 0,001. Преобразуем

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8\frac{10}{8}} = 2\sqrt[3]{1+\frac{2}{8}} = 2\sqrt[3]{1+0,25} = 2(1+0.25)^{\frac{1}{3}}$$

Воспользуемся биномиальным рядом при x=0,25 и $m = \frac{1}{3}$.

Продолжение

Получим

$$\sqrt[3]{10} \approx 2(1+\frac{1}{3}0{,}25+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}0{,}25^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}0{,}25^3) \approx$$

$$\approx 2(1+0{,}0833-0{,}0069+0{,}0009) \approx 2(1+0{,}0833-0{,}0069) \approx$$

$$\approx 2{,}1528 \approx 2{,}153.$$