

Степенные ряды

Лекции 12, 13, 14

Функциональные ряды

Ряд, члены которого являются функциями, называется *функциональным* и обозначается

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Если при $x = x_0$ ряд сходится, то x_0 называется точкой сходимости функционального ряда.

Определение. Множество значений x , для которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда.

Пример функционального ряда

Рассмотрим геометрическую прогрессию со знаменателем x :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Геометрическая прогрессия сходится, если ее знаменатель $|x| < 1$. Тогда она имеет сумму $S = \frac{1}{1-x}$, которая очевидно является функцией от x .

Степенные ряды

Определение. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

называется степенным по степеням x .

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

является степенным по степеням $(x - x_0)$

Интервал сходимости степенного ряда

Для любого степенного ряда существует конечное неотрицательное число R - радиус сходимости - такое, что если $R > 0$, то при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. Если же $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь в точке $x=0$.

Нахождение интервала сходимости по признаку Даламбера

Составим ряд из абсолютных величин членов степенного ряда и найдем интервал, в котором он будет сходиться, Тогда в этом интервале данный степенной ряд будет сходиться абсолютно. Согласно признаку Даламбера , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} < 1 \quad , \text{то}$$

степенной ряд абсолютно сходится для всех x , удовлетворяющих этому условию.

Продолжение

В этом случае ряд будет сходиться внутри интервала $(-R, R)$, где R -это радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

За пределами этого интервала ряд будет расходиться, а на концах интервала, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = 1, \text{ требуется}$$

дополнительное исследование.

Примеры

Найти интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|(2n+1)}{(2n+3) \cdot |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{2n+1}{2n+3} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n} = |x| < 1$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале $(-1, 1)$.

Примеры

Положим $x = 1$. Тогда получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. Этот ряд расходится

(сравните его с гармоническим рядом).

Полагая $x = -1$, имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, который сходится условно в силу теоремы Лейбница.

Итак, степенной ряд сходится в промежутке $[-1, 1)$.

Примеры

Найти интервал сходимости степенного

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Здесь $u_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$,

$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1) |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1}$$

Продолжение

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0$$

Но $0 < 1$ всегда, т.е. независимо от x . Это означает, что степенной ряд сходится независимо от x , т.е. на всей числовой прямой.

Итак, интервал сходимости ряда - это промежуток $(-\infty, \infty)$.

Пример

Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! |x|^{n+1}}{n! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n (n+1) |x|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)$$

Этот предел может быть меньше единицы, если только $x=0$ (иначе он будет равен бесконечности). Это означает, что степенной ряд сходится лишь в точке $x=0$.

Свойства степенных рядов. Непрерывность суммы ряда

1. Сумма степенного ряда

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

является непрерывной функцией в каждой точке интервала сходимости этого ряда.

Например,

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

непрерывна, если $|x| < 1$.

Почленное дифференцирование

2. Ряд, полученный почленным дифференцированием степенного ряда, является степенным рядом с тем же интервалом сходимости, что и данный ряд, причем :если

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots ,$$

ТО

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

Почленное интегрирование

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом промежутке, целиком входящем в интервал сходимости степенного ряда, при этом

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} a_0 dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_1 x dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx + \dots$$

где $(\alpha, \beta) \subset (-R, R)$.

Разложение функций в степенные ряды

Определения

Определение. Если бесконечно дифференцируемая функция является суммой степенного ряда, то говорят, что она разлагается в степенной ряд .

Опр. Рядом Тейлора функции $f(x)$ называется ряд, коэффициенты которого определяются

по формулам $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Степенной ряд как ряд Тейлора

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$,
то ряд справа есть ее ряд Тейлора.

Короче: если функция представлена в виде степенного ряда, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

Представление функции ее рядом Тейлора единственно.

Формула Тейлора

Рассмотрим n -ю частичную сумму ряда Тейлора:

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Этот многочлен называется
многочленом Тейлора функции $f(x)$.

Разность $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ называется
остаточным членом ряда Тейлора.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } c \in (x_0, x)$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Условия сходимости ряда Тейлора к функции $y=f(x)$

Для того чтобы функцию можно было разложить в ряд Тейлора на интервале $(-R, R)$, необходимо и достаточно, чтобы функция на этом интервале имела производные всех порядков и чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при всех $x \in (-R, R)$ при $n \rightarrow \infty$

Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ бесконечно дифференцируема и ее производные равномерно ограничены в совокупности, т. е. существует такая константа M , что для всех $x \in (-R, R)$ выполняется условие $|f^{(n)}(x)| \leq M$ при $n=0, 1, 2, \dots$, то функцию можно разложить в ряд Тейлора на этом интервале.

Разложение $f(x) = e^x$

Все производные этой функции совпадают с самой функцией, а в точке $x=0$ они равны 1.

Составим для функции формально ряд

Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Этот ряд, очевидно, сходится на всей числовой оси. Но все производные функции равномерно ограничены, т. к. $f^{(n+1)}(c) = e^c < e^R$, где R -любое число из интервала сходимости. Поэтому этот ряд сходится именно к функции e^x .

Разложение в ряд синуса.

Вычислим производные синуса:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

.....

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$$

.....

Продолжение

Ясно, что все производные синуса не превосходят по модулю единицу. Так что запишем ряд, который будет разложением синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

при этом видно, что этот ряд сходится на всей числовой оси.

Разложения некоторых функций в ряд Тейлора

При решении задач удобно пользоваться разложениями:

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, \infty)$$

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Продолжение

Геометрическую прогрессию мы получили выше:

$$4. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, |x| < 1$$

Интегрируя по x обе части равенства, получим логарифмический ряд:

$$5. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

Биномиальный ряд

$$6. \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$7. \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

Биномиальный, логарифмический ряды и ряд для арктангенса сходятся в интервале $(-1,1)$.

Пример

Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию

$$f(x) = \sqrt[3]{27-x}$$

Решение. Зная разложение функции в биномиальный ряд, сходящийся на интервале $(-1, 1)$, преобразуем данную функцию так, чтобы воспользоваться биномиальным рядом.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27-x} &= \sqrt[3]{27\left(1-\frac{x}{27}\right)} = \sqrt[3]{1-\frac{x}{27}} = \left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left[1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{27}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x}{27}\right)^2 + \dots + \right. \\ &\left. + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{27}\right)^n + \dots\right], \text{ где } \left|\frac{x}{27}\right| < 1 \end{aligned}$$

Применение степенных рядов

Приближенное вычисление интегралов

Разложения 1–7 позволяют, используя соответствующее разложение, вычислять приближенно значения функций, интегралы, приближенно интегрировать дифференциальные уравнения.

Пример. С помощью степенного ряда вычислить с точностью до 0,0001

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Решение

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots) dx = \\ &= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^8}{4!} dx - \dots = \\ &= x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^5}{2 \cdot 5} \Big|_0^1 - \frac{x^7}{6 \cdot 7} \Big|_0^1 + \frac{x^9}{24 \cdot 9} \Big|_0^1 - \dots = \end{aligned}$$

Продолжение

$$= x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^5}{2 \cdot 5} \Big|_0^1 - \frac{x^7}{6 \cdot 7} \Big|_0^1 + \frac{x^9}{24 \cdot 9} \Big|_0^1 - \dots =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \dots$$

Так как получившийся ряд является знакочередующимся, то сумма знакочередующегося ряда не превосходит первого члена такого ряда. Ясно, что часть ряда, которую в задаче следует отбросить, также является знакочередующимся рядом и его сумма не превзойдет модуля первого отброшенного члена ряда. Таким образом, первый отброшенный член ряда должен быть меньше заданной погрешности, т.е. 0,0001.

Продолжение

Вычислив еще несколько членов ряда

$$-\frac{1}{1320}, -\frac{1}{9360}, -\frac{1}{75600}$$

ВИДИМ, ЧТО $\frac{1}{75600} \approx 0,0001$

Отбросив этот и следующие за ним члены ряда, получим:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} = 0,7468$$

Приближенное вычисление значений функций

Вычислить $\sqrt[3]{10}$ с точностью до 0,001.

Преобразуем

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8 \frac{10}{8}} = 2 \sqrt[3]{1 + \frac{2}{8}} = 2 \sqrt[3]{1 + 0,25} = 2(1 + 0.25)^{\frac{1}{3}}$$

Воспользуемся биномиальным рядом при $x=0,25$ и $m = \frac{1}{3}$.

Продолжение

Получим

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{10} &\approx 2\left(1 + \frac{1}{3}0,25 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}0,25^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!}0,25^3\right) \approx \\ &\approx 2(1 + 0,0833 - 0,0069 + 0,0009) \approx 2(1 + 0,0833 - 0,0069) \approx \\ &\approx 2,1528 \approx 2,153.\end{aligned}$$