



# *Проект*

Семенова Алексея Витальевича

Тема: « Степенные ряды. Область сходимости  
степенного ряда»

Димитровград 2008г.

# *Содержание:*

1. Определение степенного ряда
2. Примеры степенных рядов
3. Область сходимости степенного ряда.
4. Равномерная сходимость функционального ряда.
5. Нахождение радиуса сходимости ряда.
6. Список использованной литературы.



# Степенной ряд и его область сходимости.

**Определение:** *Степенным* рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  - постоянные вещественные числа, называемые *коэффициентами* степенного ряда.

Любой степенной ряд сходится при  $x=0$ , т.к. в этой точке все члены ряда (1), кроме первого, - нули. Есть степенные ряды вида (1), которые сходятся лишь в точке  $x=0$ ; такие ряды относят к рядам первого класса.

Например, ряд

$$1 + x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots \quad (1)$$

сходится лишь в точке  $x=0$ ; в любой другой точке  $x \neq 0$  этот ряд расходится. Действительно, при каждом  $x \neq 0$  из числовой оси имеем числовой ряд. Исследуем его на сходимость. Образует ряд

$$1 + |x| + 2!|x|^2 + \dots + n!|x|^n + \dots \quad (2)$$

Применив к последнему ряду признак Даламбера, получим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|x|^{N+1}}{n!|x|^N} = |x| \lim_{N \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \quad (3)$$

при всех  $x \neq 0$ . Следовательно, ряд (3), значит, и ряд (2) расходится при всех  $x \neq 0$ .

# Получение биномиального ряда

Еще в середине 60-х годов XVII века, получив формулу бинома для натурального показателя, Ньютон сразу же приступил к выяснению того, действительна ли она для отрицательных и дробных показателей. В частности, он проверил ее для

показателей  $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

В первом случае он пришел к ряду  $y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots$ ,

во втором к ряду  $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$

Здесь, как при любом рациональном  $m$ , сумма биномиального ряда (при  $-1 \leq x \leq 1$ ) дает арифметическое значение радикала.

# Получение биномиального ряда

При  $m = -\frac{1}{2}$  имеем:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots$$

Этот ряд сходится при  $(-1 \leq x \leq 1)$ . Однако, результаты Ньютона в этом, как и в других вопросах анализа, были, как известно, опубликованы намного позже их получения автором. Так называемый биномиальный ряд, связанный с именем Ньютона, имеет следующий

вид: 
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

При этом  $m$  – любое, отличное от нуля вещественное число. Этот ряд сходится при  $|x| \leq 1$ , т.е. при  $-1 \leq x \leq 1$

Доказательство разложения для любого вещественного  $m$ , было дано Эйлером.

# Способ разложения в ряд, предложенный Ньютоном

Одним из способов разложения в ряды, применявшихся Ньютоном, было обращение ряда; например, исходя из логарифмического ряда

$$x = \ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

в котором  $x$  разложен по степеням  $y$ , он устанавливает обратное разложение  $y$  по степеням  $x$ , получая:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

или

$$1 + y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

который представляет собой показательный ряд, он сходится для любого  $x$ .

## Способ разложения в ряд, предложенный Ньютоном

Заменяя в ряде  $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots$

$x$  на  $-x^2$ , найдем:  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots$

Этот ряд Ньютон проинтегрировал почленно,  
получив:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \dots$$

Ряд сходится на отрезке  $[-1; 1]$

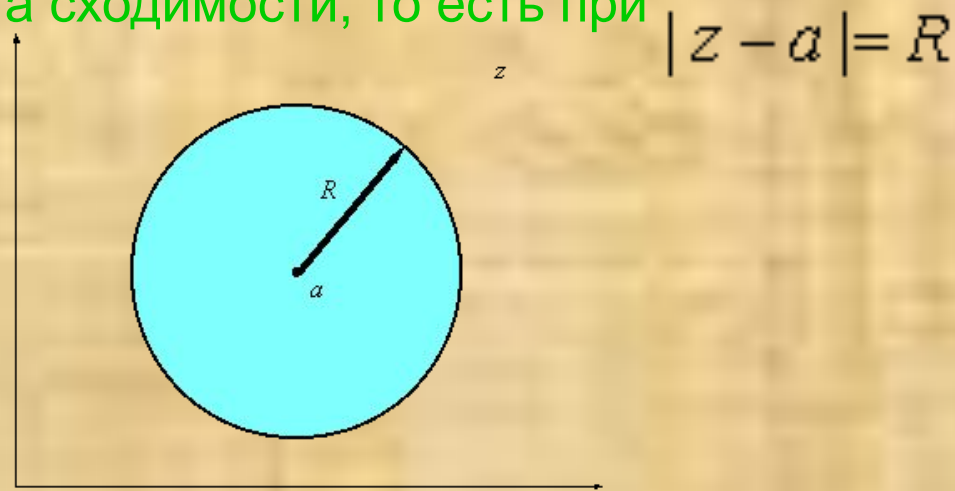


# Область сходимости степенного ряда

- Теорема. Для всякого степенного ряда существует такое число  $R$ , что степенной ряд сходится при  $|z - a| < R$  и расходится при  $|z - a| > R$
- Таким образом, область сходимости степенного ряда есть круг с центром в точке  $a$  радиуса  $R$ , который называется кругом сходимости. Число  $R$  называется радиусом сходимости ряда.

# Область сходимости степенного ряда

Отметим еще, что общего ответа на вопрос о сходимости степенного ряда на границе круга сходимости, то есть при



, дать нельзя.

В каждом конкретном случае этот вопрос надо рассматривать отдельно.

Заметьте еще, что при  $R=0$  степенной ряд сходится только в точке  $z=a$ ; при  $R=+\infty$  степенной ряд сходится.

# Нахождение радиуса сходимости ряда

- Важнейшая характеристика степенного ряда – его радиус сходимости – находится одним из следующих способов.

- 1. Если существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|, \text{ то } R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

- 2. Если существует

- 3. Пусть  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ . Тогда

$$R = \frac{1}{\rho}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|c_k|}$$

$$R = \frac{1}{\rho}$$

ПРИМЕР . Определить интервал сходимости ряда и исследовать его на концах интервала:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \square$$

Решение.

Т.к. степенной ряд по теореме Абеля сходится абсолютно в интервале сходимости, то рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n}$  . Это ряд положительный, поэтому мы можем для его исследования применить признак Даламбера.

$$u_n = \frac{|x|^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n}, \quad u_{n+1} = \frac{|x|^n}{3^n \cdot (n+1)}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n \cdot 3^{n-1} \cdot n}{3^n \cdot (n+1) \cdot |x|^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x| \cdot n}{3 \cdot (n+1)} = \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{3} \square 1$$

Получили интервал сходимости данного ряда  $|x| < 3$  ,  $-3 < x < 3$  .

Исследуем сходимость данного ряда на концах интервала  $[-3;3]$

$x = -3$  подставим в данный ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Полученный  
знакопеременный ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  сходится по  
признаку Лейбница.

Первое условие признака Лейбница выполняется, т.к.

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

Второе условие признака Лейбница также выполняется, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Исследуем сходимость данного ряда на концах  
интервала  $[-3;3]$

$x = -3$  подставим в исходный ряд, получим

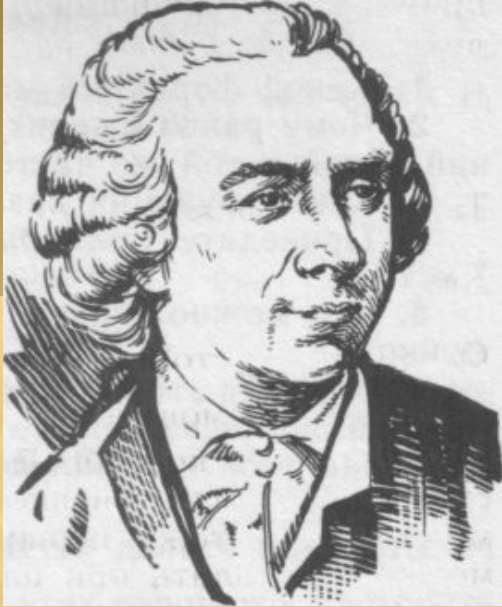
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

гармонический ряд, он расходится.

Следовательно, областью сходимости данного ряда является  
промежуток  $[-3;3)$ .

Ответ:  $[-3;3)$  или  $-3 \leq x < 3$

# Краткая историческая справка



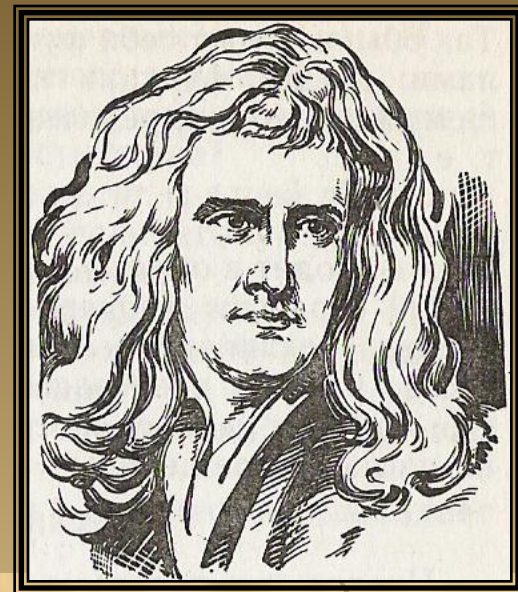
Леонард Эйлер  
(1707-1783)

Швейцарский математик и механик, академик Петербургской Академии наук, автор огромного количества научных открытий во всех областях математики.

Эйлер первым применил средства математического анализа в теории чисел, положил начало топологии.

# Исаак Ньютон

## (1643 – 1727)



**В 1665 г. Исаак Ньютон окончил**

**Кембриджский Университет и собирался начать работу там же, в его родном Тринити-колледже.**

**Он открыл закон всемирного тяготения и приступил с его помощью к исследованию планет.**

**Но чтобы исследовать и выражать законы физики, Ньютону приходилось заниматься и математикой. В Вулстропе Ньютон, решая задачи на проведение касательных к кривым, вычисляя площади криволинейных фигур, создает общий метод решения таких задач – метод флюксий (производных) и флюэнт, которые у Г.В. Лейбница назывались дифференциалами.**

**Ньютон так же находит формулу для различных степеней суммы двух чисел, причем не ограничивается натуральными показателями и приходит к суммам бесконечных рядов чисел. Ньютон показал, как применять ряды в математических исследованиях.**

**Работы Ньютона надолго опередили пути развития физики и математики. Закон всемирного тяготения постепенно осознавался как единый принцип, , позволяющий строить совершенную теорию движения небесных тел. Созданный им математический анализ открыл новую эпоху в математике.**



# Список использованной литературы:

---

1. И.И. Баврин, В.А. Матросов  
Общий курс высшей математики.
2. М.Я. Выгодский  
Справочник по высшей математике для ВУЗов.
3. Б.В. Соболев  
Практикум по высшей математике/ Ростов н/Д: Феникс,  
2006,-640 с.