Проект

Семенова Алексея Витальевича

Тема: « Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда»

Димитровград 2008г.

Содержание:

Степенной ряд и его область сходимости.

Определение: ***Степенным*** рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ -постоянные вещественные числа, называемые ***коэффициентами*** степенного ряда.

Любой степенной ряд сходится при x=0, т.к. в этой точке все члены ряда (1), кроме первого, - нули. Есть степенные ряды вида (1), которые сходятся лишь в точке x=0; такие ряды относят к рядам первого класса.

Например, ряд

$$1 + x + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots \qquad (1)$$

сходится лишь в точке x=0; в любой другой точке x≠0 этот ряд расходится. Действительно, при каждом x≠0 из числовой оси имеем числовой ряд. Исследуем его на сходимость. Образуем ряд

$$1 + |x| + 2!|x|^2 + \ldots + n!|x|^n + \ldots \qquad (2)$$

Применив к последнему ряду признак Даламбера, получим:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{N+1}}{n!|x|^N} = |x| \lim_{N\to\infty}(n+1) = \infty \qquad (3)$$

при всех x≠0. Следовательно, ряд (3), значит, и ряд (2) расходятся при всех x≠0.

Получение биномиального ряда

Еще в середине 60-х годов XVII века, получив формулу бинома для натурального показателя, Ньютон сразу же приступил к выяснению того, действительна ли она для отрицательных и дробных показателей. В частности, он проверил ее для

показателей $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

В первом случае он пришел к ряду $y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \ldots$,

во втором к ряду

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

Здесь, как при любом рациональном **m**, сумма биномиального ряда (при $-1 \le x \le 1$) дает арифметическое значение радикала.

Получение биномиального ряда

При $m = -\frac{1}{2}$ имеем:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \ldots$$

Этот ряд сходится при ($-1 < x \le 1$). Однако, результаты Ньютона в этом, как и в других вопросах анализа, были, как известно, опубликованы намного позже их получения автором. Так называемый биномиальный ряд, связанный с именем Ньютона, имеет следующий

вид: $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

При этом m – любое, отличное от нуля вещественное число. Этот ряд сходится при $|x| < 1$, т.е. при $-1 < x < 1$

Доказательство разложения для любого вещественного *m*, было дано Эйлером.

Способ разложения в ряд, предложенный Ньютоном

Одним из способов разложения в ряды, применявшихся Ньютоном, было обращение ряда; например, исходя из логарифмического ряда

$$x = \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots$$

в котором ***x*** разложен по степеням ***y***, он устанавливает обратное разложение ***y*** по степеням ***x***, получая:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

или

$$1 + y = e^x = 1\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

который представляет собой показательный ряд, он сходится для любого ***x***.

Способ разложения в ряд, предложенный Ньютоном

Заменив в ряде $$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\ldots$$

x на $-x^2$, найдем: $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\ldots$$

Этот ряд Ньютон проинтегрировал почленно, получив:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{x^9}{9}+\ldots$$

Ряд сходится на отрезке $[-1;1]$

Область сходимости степенного ряда

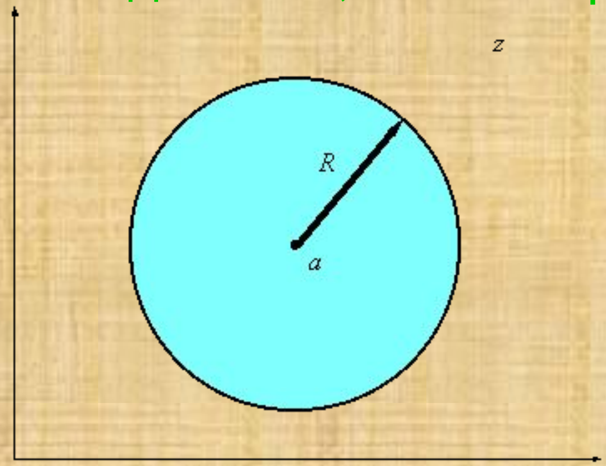
- Теорема. Для всякого степенного ряда существует такое число , что степенной ряд сходится при $|z-a|<R$

и расходится при $|z-a|>R$

- Таким образом, область сходимости степенного ряда есть круг с центром в точке *a* радиуса *R*, который называется кругом сходимости. Число *R* называется радиусом сходимости ряда.

Область сходимости степенного ряда

Отметим еще, что общего ответа на вопрос о сходимости степенного ряда
на границе круга сходимости, то есть при $|z-a|=R$



, дать нельзя.
В каждом конкретном случае этот вопрос надо рассматривать отдельно.
Заметьте еще, что при R=0 степенной ряд сходится только в точке $z=a$; при $R=+\infty$ степенной ряд сходится.

Нахождение радиуса сходимости ряда

- Важнейшая характеристика степенного ряда – его радиус сходимости – находится одним из следующих способов.
- 1. Если существует , то .

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| \qquad R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$$

- 2. Если существует , то .
- 3. Пусть $\rho=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}$. тогда $R=\dfrac{1}{\rho}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\sqrt[k]{|c_k|} \qquad R=\frac{1}{\rho}$$

ПРИМЕР . Определить интервал сходимости ряда и исследовать его на концах интервала:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}\cdot n}=1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots$$

Решение.

Т.к. степенной ряд по теореме Абеля сходится абсолютно в интервале сходимости, то рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n-1}}{3^{n-1}\cdot n}$$

Это ряд положительный, поэтому мы можем для его исследования применить признак Даламбера.

$$u_n=\frac{|x|^{n-1}}{3^{n-1}\cdot n},\qquad u_{n+1}=\frac{|x|^{n}}{3^{n}\cdot (n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n}\cdot 3^{n-1}\cdot n}{3^{n}\cdot (n+1)\cdot |x|^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|\cdot n}{3\cdot (n+1)}=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x|}{3}<1$$

Получили интервал сходимости данного ряда IxI<3 , -3<x <3 .

Исследуем сходимость данного ряда на концах интервала $\left[-3;3\right]$

$x = -3$ подставим в данный ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{n-1}}{3^{n-1}\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

. Полученный знакочередующийся ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\square$ сходится по **признаку Лейбница**.

Первое условие признака Лейбница выполняется, т.к.

$$1\square\frac{1}{2}\square\frac{1}{3}\square\frac{1}{4}\square\square$$

Второе условие признака Лейбница также выполняется, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Исследуем сходимость данного ряда на концах интервала $[-3;3]$

x= - 3 подставим в исходный ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

гармонический ряд, он расходится.

Следовательно, областью сходимости данного ряда является промежуток $\left[-3;3\right)$.

__*Ответ*__: $\left[-3;3\right)$ *или* $-3 \le x \square 3$

Краткая историческая справка

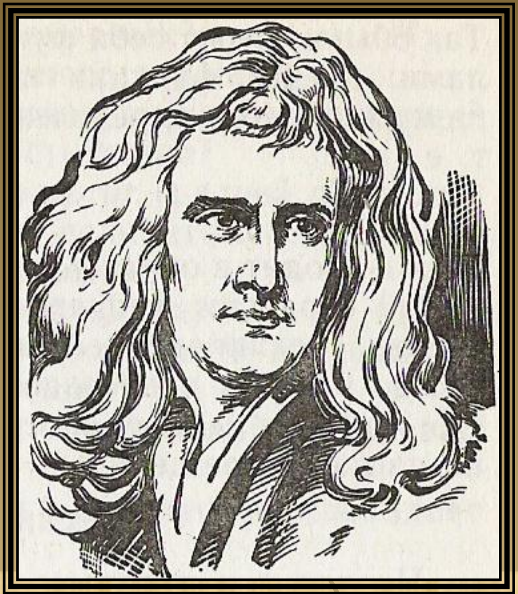
Леонард Эйлер

(1707-1783)

Швейцарский математик и механик, академик Петербургской Академии наук, автор огромного количества научных открытий во всех областях математики.

Эйлер первым применил средства математического анализа в теории чисел, положил начало топологии.

Исаак Ньютон
(1643 – 1727)



В 1665 г. Исаак Ньютон окончил Кембриджский Университет и собирался начать работу там же, в его родном Тринити-колледже.

Он открыл закон всемирного тяготения и приступил с его помощью к исследованию планет.

Но чтобы исследовать и выражать законы физики, Ньютону приходилось заниматься и математикой. В Вулстропе Ньютон, решая задачи на проведение касательных к кривым, вычисляя площади криволинейных фигур, создает общий метод решения таких задач – метод флюксий (производных) и флюэнт, которые у Г.В. Лейбница назывались дифференциалами.

Ньютон так же находит формулу для различных степеней суммы двух чисел, причем не ограничивается натуральными показателями и приходит к суммам бесконечных рядов чисел. Ньютон показал, как применять ряды в математических исследованиях.

Работы Ньютона надолго опередили пути развития физики и математики. Закон всемирного тяготения постепенно осознавался как единый принцип, , позволяющий строить совершенную теорию движения небесных тел. Созданный им математический анализ открыл новую эпоху в математике.

Список использованной литературы:

1. И.И. Баврин, В.А. Матросов
 Общий курс высшей математики.

2. М.Я. Выгодский
 Справочник по высшей математике для ВУЗов.

3. Б.В. Соболь
Практикум по высшей математике/ Ростов н/Д: Феникс, 2006,-640 с.