



Una Serpiente



СТЕРЕОМЕТРИЯ

- Объёмы тел
- Изображения пространственных фигур

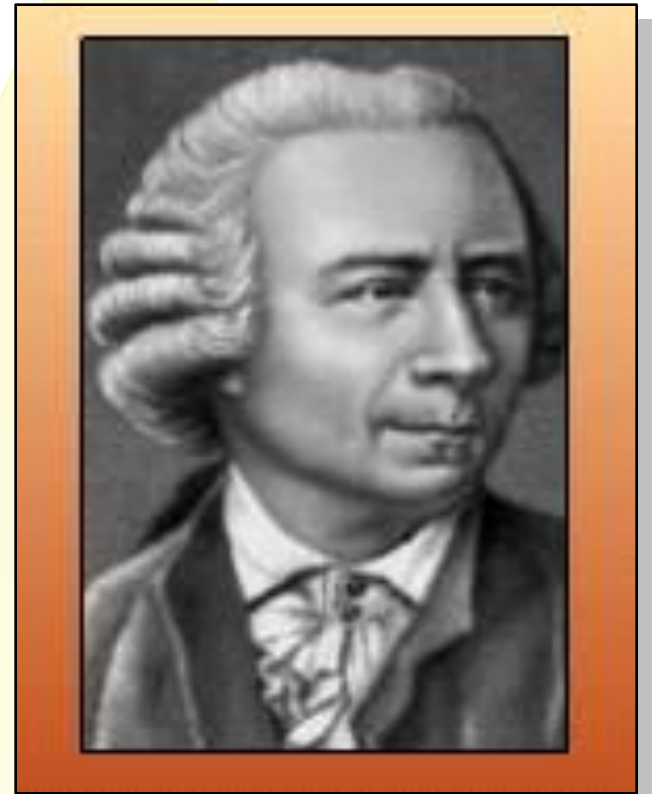


«Мой карандаш, бывает еще остроумней моей головы», — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).

В своей деятельности человеку повсюду приходится сталкиваться с необходимостью изучать форму, размеры, взаимное расположение пространственных фигур.

Подобные задачи решают и астрономы, имеющие дело с самыми большими масштабами, и физики, исследующие структуру атомов и молекул.

Раздел геометрии, в котором изучаются такие задачи, называется стереометрией

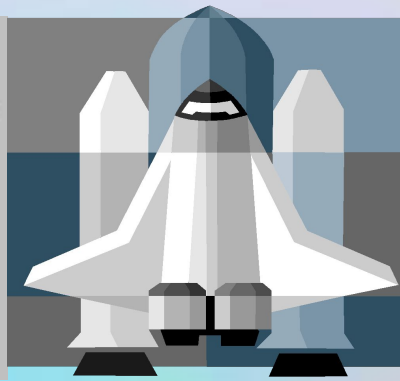


Интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии

Мы знаем, что

- **ГЕОМЕТРИЯ** возникла из практических задач людей;
- **ГЕОМЕТРИЯ** лежит в основе всей техники и большинства изобретений человечества;
- **ГЕОМЕТРИЯ** нужна

- технику,
- инженеру,
- рабочему,
- архитектору,
- модельеру ...

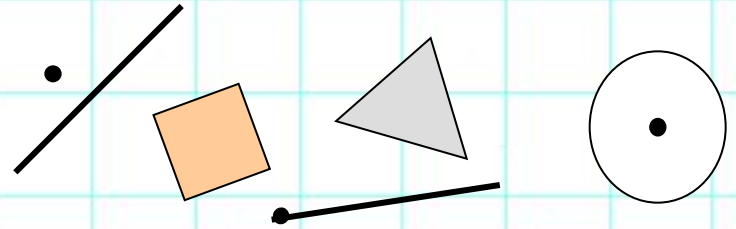


«планиметрия» – наименование смешанного происхождения: от греч. **metreo** – *измерять* и лат. **planum** – *плоская поверхность (плоскость)*

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

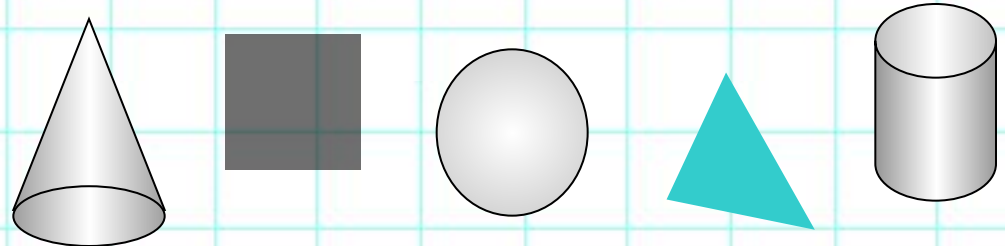
ГЕОМЕТРИЯ на плоскости



«стереометрия» – от греч. **stereos** – *пространственный (stereon – объем)*.

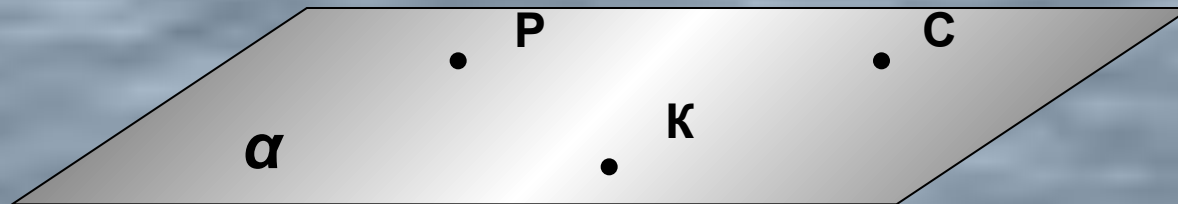
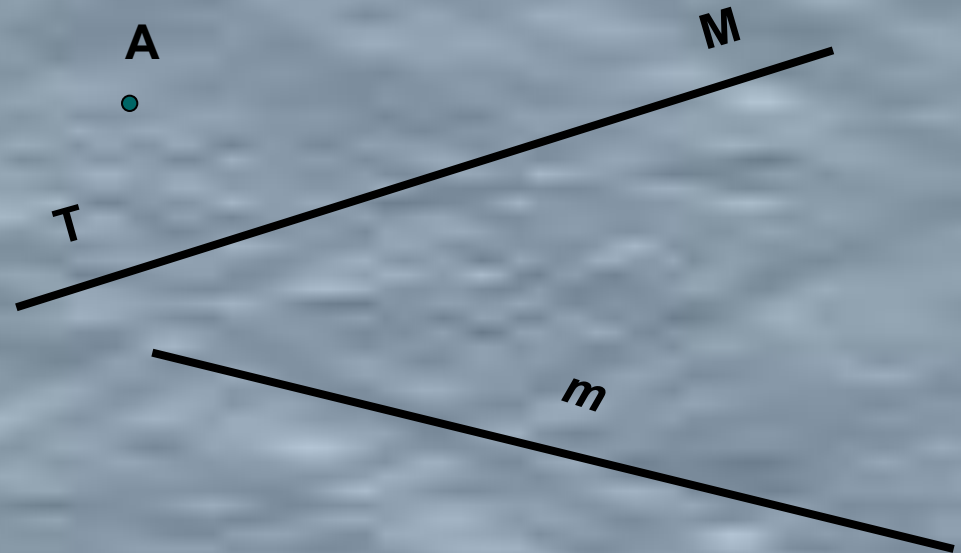
СТЕРЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ в пространстве



Основные понятия стереометрии

- точка,
- прямая,
- плоскость,
- расстояние



$\alpha = (PKC)$

$|PK|$

$A \notin \alpha, KC \subset \alpha, P \in \alpha, |PK| = 2 \text{ см}$

Аксиомы стереометрии

*Слово «аксиома» греческого происхождения и в переводе означает **ИСТИННОЕ**, исходное положение теории.*

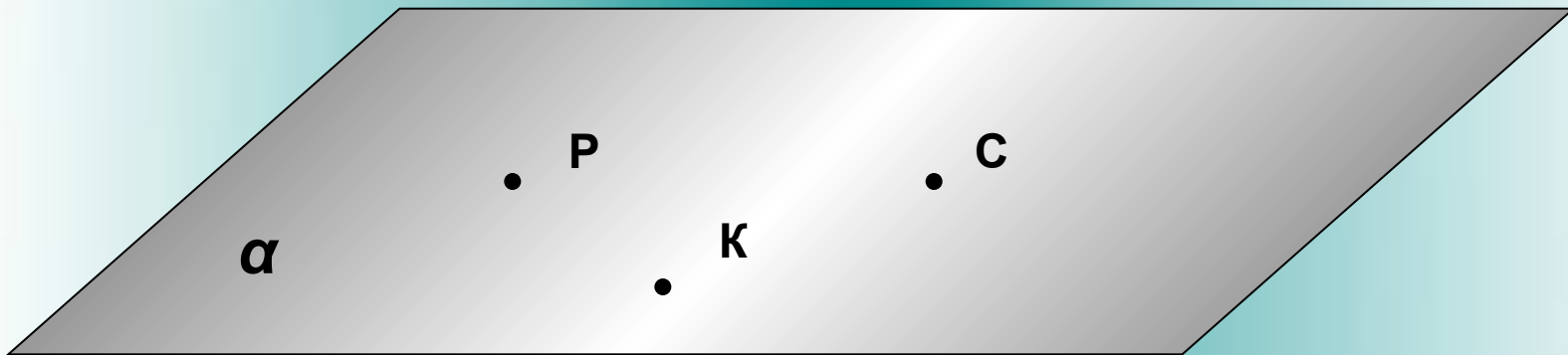
Система аксиом стереометрии дает описание свойств пространства и основных его элементов

Понятия *«точка»*, *«прямая»*, *«плоскость»*, *«расстояние»* принимаются без определений: их описание и свойства содержатся в аксиомах

Аксиомы стереометрии

A-1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой
проходит плоскость, и притом только одна

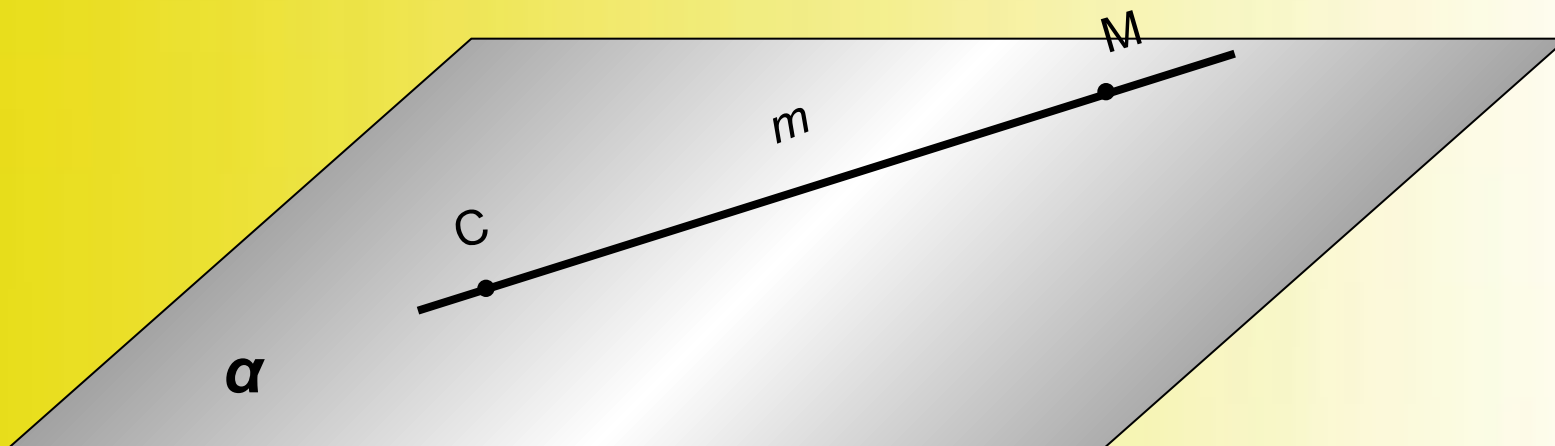


$$\alpha = (PKC)$$

Аксиомы стереометрии

A-2

**Если две точки прямой лежат в плоскости,
то все точки прямой лежат в этой плоскости**

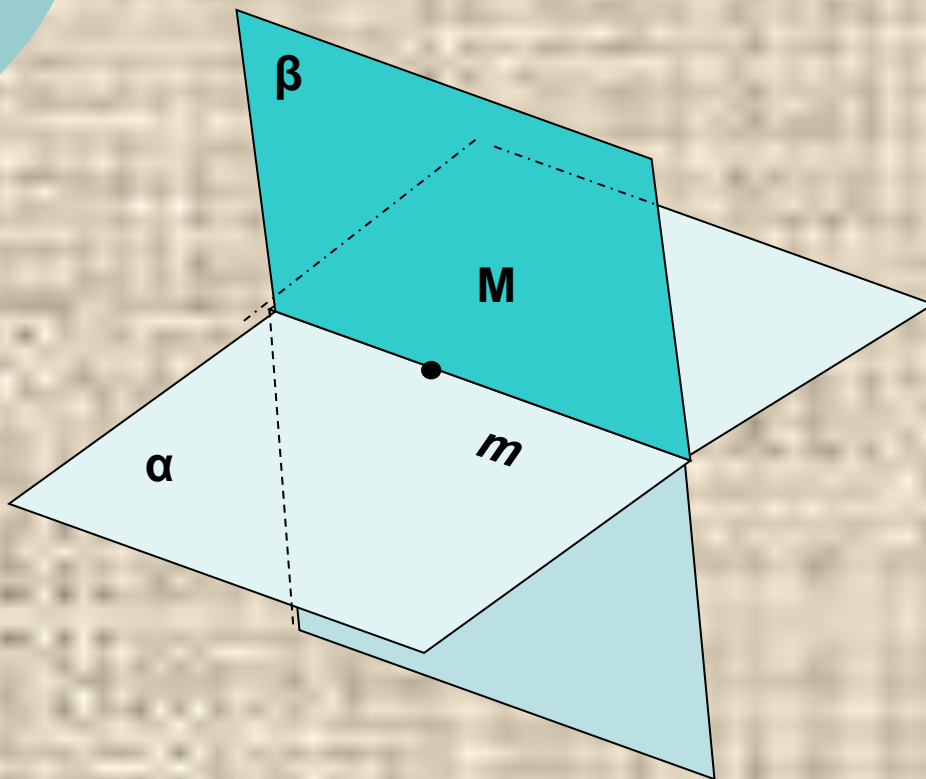


Если $M, C \in \alpha$ $M, C \in m$, то $m \subset \alpha$

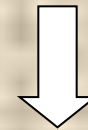
Аксиомы стереометрии

А-3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$$M \in \alpha, M \in \beta, M \in m$$



$$m \in \alpha, m \in \beta$$

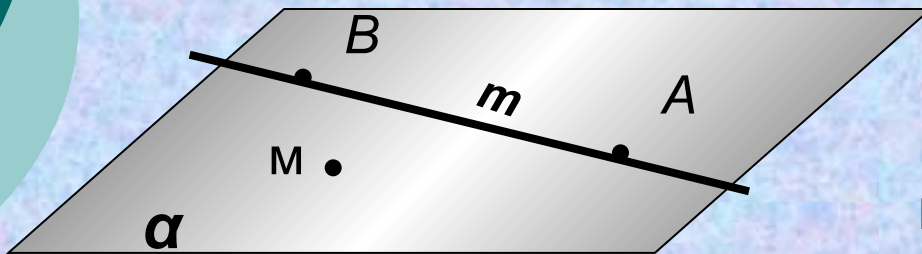


$$\alpha \cap \beta = m$$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

T-1

Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано: $M \notin m$

Доказательство

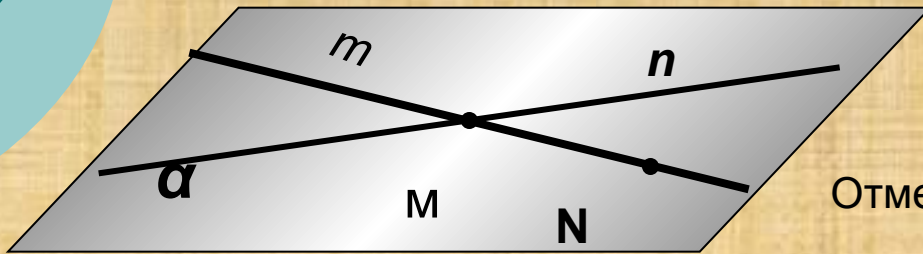
Пусть точки $A, B \in m$.

- Так как $M \notin m$, то точки A, B и M не принадлежат одной прямой. По А-1 через точки A, B и M проходит только одна плоскость — плоскость (ABM) , обозначим её α . Прямая m имеет с ней две общие точки — точки A и B , следовательно, по аксиоме А-2 эта прямая лежит в плоскости α . Таким образом, плоскость α проходит через прямую m и точку M и является искомой.
- Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую m и точку M , не существует. Предположим, что есть другая плоскость — β , проходящая через прямую m и точку M . Тогда плоскости α и β проходят через точки A, B и M , не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость α единственна.
- Теорема доказана

СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

T-2

Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано: $m \cap n = M$

Доказательство

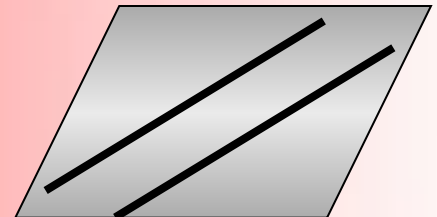
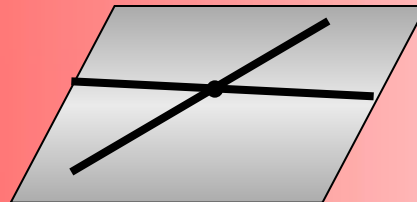
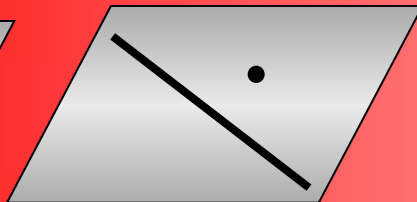
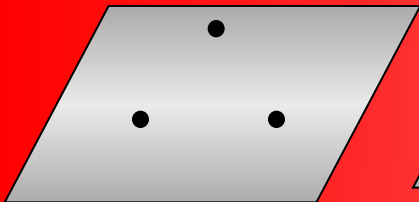
Отметим на прямой m произвольную точку N , отличную от M .

- Рассмотрим плоскость $\alpha = (n, N)$. Так как $M \in \alpha$ и $N \in \alpha$, то по А-2 $m \subset \alpha$. Значит обе прямые m, n лежат в плоскости α и следовательно α , является искомой
- Докажем единственность плоскости α . Допустим, что есть другая, отличная от плоскости α и проходящая через прямые m и n , плоскость β . Так как плоскость β проходит через прямую n и не принадлежащую ей точку N , то по Т-1 она совпадает с плоскостью α . Единственность плоскости α доказана.
- Теорема доказана

ВЫВОД

Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

- По трем точкам, не лежащим на одной прямой
- По прямой и точке, не лежащей на этой прямой
- По двум пересекающимся прямым
- По двум параллельным прямым



Определение объема тела

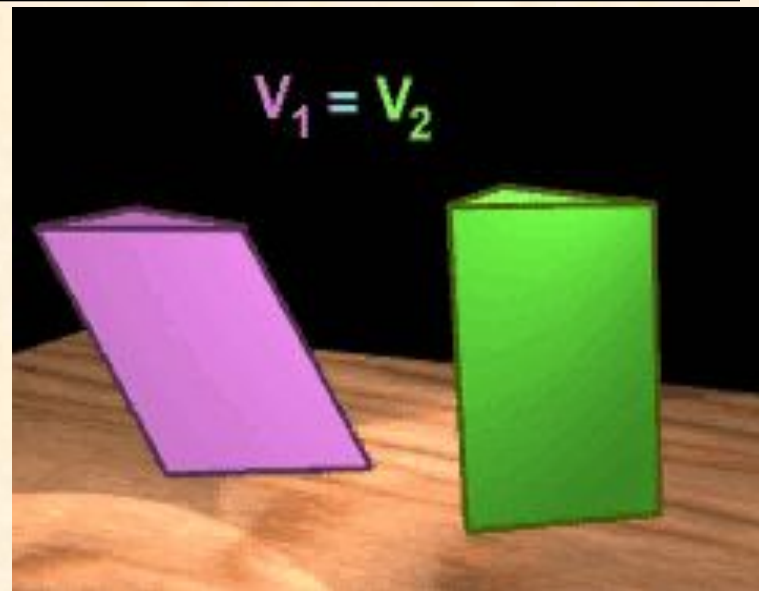
Определение

- Тело называется простым, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.
- В частности, любой выпуклый многогранник является простым телом.

Определение

Объемом тела называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими свойствами:

1. равные тела имеют равные объемы;
2. при параллельном переносе тела его объем не изменяется;

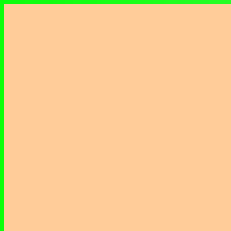


Определение

Тела с равными объемами называются равновеликими .

Из свойства 2 следует, что если тело с объемом V_1 содержится внутри тела с объемом V_2 , то $V_1 < V_2$.

- за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;
- если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;



Теорема 1.

- Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений: $V = abc$

Теорема 2.

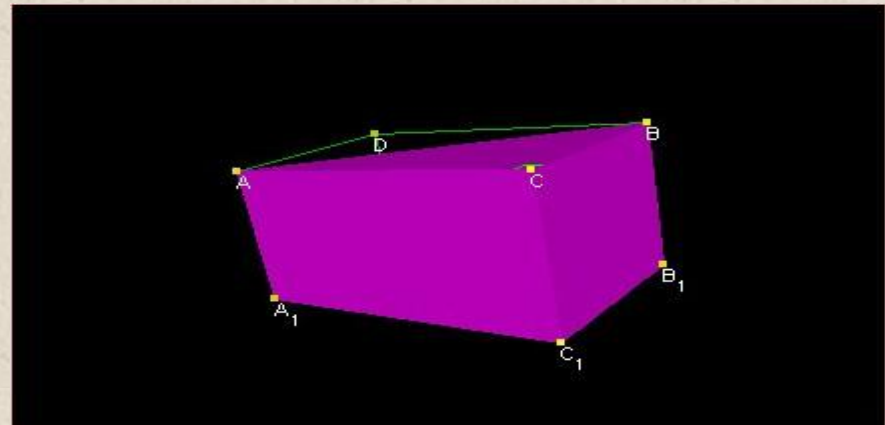
Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = SH .$$

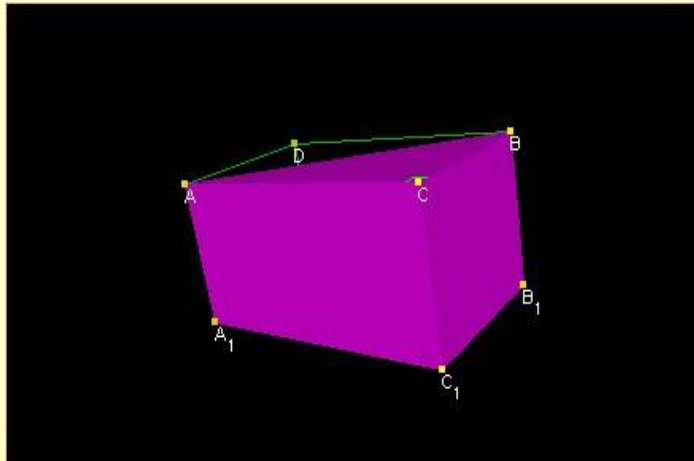
Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма, причем ее основание – прямоугольный треугольник ABC

Дополним эту призму до прямоугольного параллелепипеда $ACBDA_1C_1B_1D_1$.

Середина O диагонали AB_1 этого параллелепипеда является его центром симметрии.



Данная призма и призма $ABDA_1B_1D_1$, которая дополняет данную призму до параллелепипеда, симметричны относительно точки O , а поэтому равновелики.



Пусть V и V_1 – соответственно
объемы призмы $ABCA_1B_1C_1$
и параллелепипеда,

тогда, учитывая теорему 1,
получим

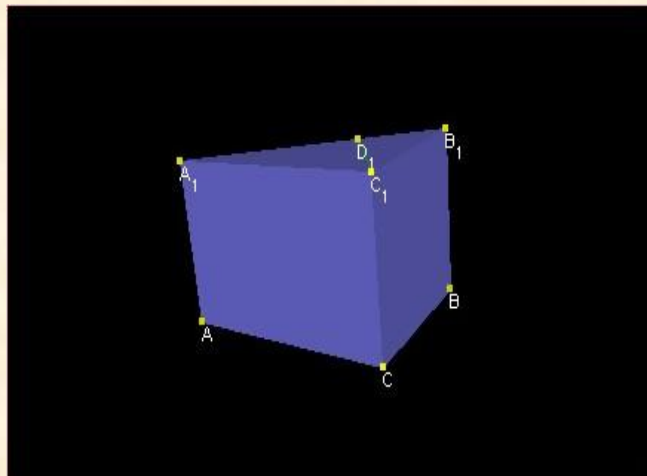
Рассмотрим произвольную прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$
Если ΔABC не прямоугольный, то его можно разбить на два
прямоугольных треугольника ADC и BDC .

Следовательно,

$$V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ADC} \cdot H + S_{\Delta BDC} \cdot H = \\ S_{\Delta ABC} \cdot H = S \cdot H.$$

Таким образом, теорема справедлива для произвольной прямой
треугольной призмы. Если есть прямая n -угольная призма ($n > 3$),
разобьем ее на конечное число прямых треугольных призм

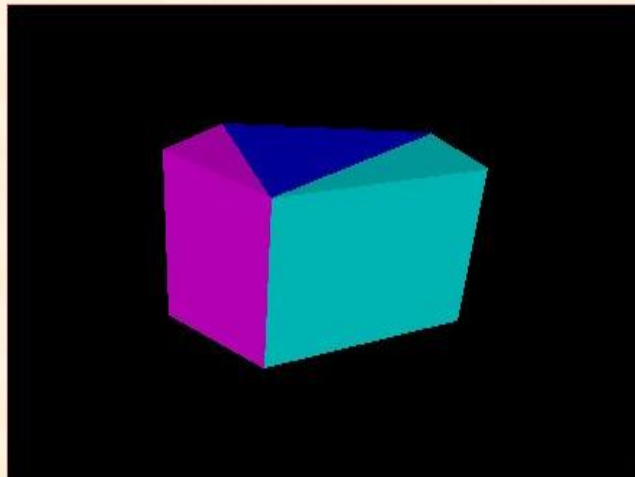
Сложив объемы этих треугольных призм, получим объем n -угольной
призмы $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) H = S \cdot$
 H , где S_1, S_2, \dots, S_n – площади оснований треугольных призм,
 S и H – площадь основания и высота n -угольной призмы.



$$V = \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BC = S_{ABC}CC_1 = S \cdot H$$

Рассмотрим произвольную прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$

Если ΔABC не прямоугольный, то его можно разбить на два прямоугольных треугольника ADC и BDC .



Следовательно, $V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ADC} \cdot H + S_{\Delta BDC} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot H = S \cdot H$.

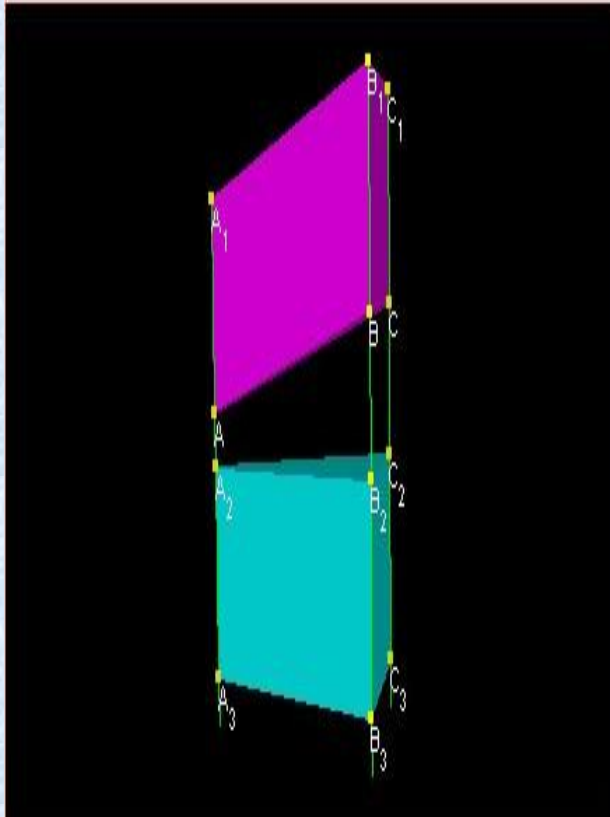
Таким образом, теорема справедлива для произвольной прямой треугольной призмы. Если есть прямая n -угольная призма ($n > 3$), разобьем ее на конечное число прямых треугольных призм

Сложив объемы этих треугольных призм, получим объем n -угольной призмы

$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)H = S \cdot H$, где S_1, S_2, \dots, S_n – площади оснований треугольных призм, S и H – площадь основания и высота n -угольной призмы.

Теорема 3.

Объем наклонной призмы равен площади перпендикулярного сечения на боковое ребро: $V = S_{\text{пс}}$

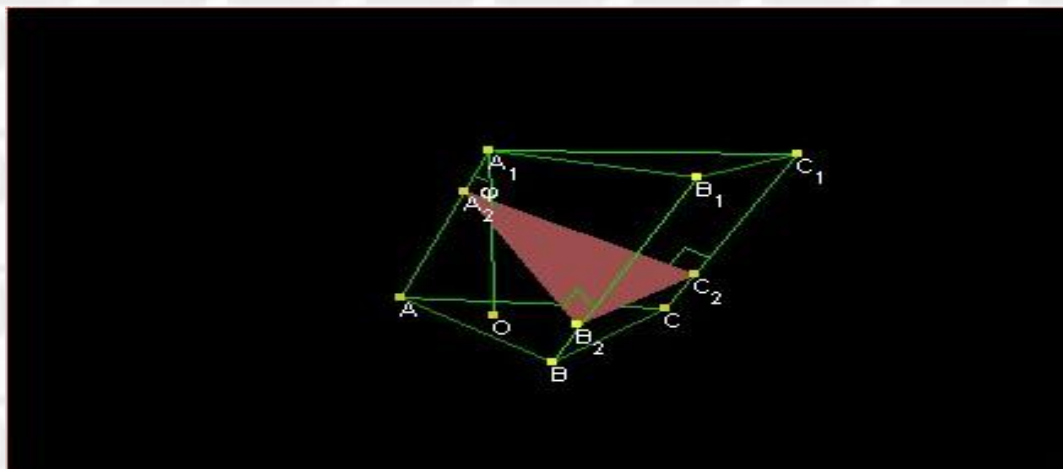


- Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма (чертеж 6.1.4), $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ – перпендикулярные сечения этой призмы.
- Призма $A_2B_2C_2A_3B_3C_3$ прямая, причем $A_2A_3 = A_1A_2$. Заметим, что параллельный перенос на вектор переводит многогранник $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$ в многогранник $A_3B_3C_3ABC$.
- Следовательно, эти многогранники равновеликие. Пусть V – объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, V_1 – объем призмы $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$, V_2 – объем многогранника $A_2B_2C_2ABC$, тогда $V + V_2 = V_1 + V_2$, откуда $V = V_1$.
- Поскольку призма $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$ прямая, то $V_1 = S_{\Delta A_3B_3C_3} \cdot A_2A_3 = S_{\text{пс}} \cdot l = V$, что и требовалось доказать

Теорема 4.

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту: $V = S \cdot H$.

- Пусть $A_2 B_2 C_2$ – перпендикулярное сечение наклонной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$, $A_1 O$ – высота этой призмы.
- Пусть φ . Поскольку $A_2 B_2 C_2 \perp A_1 A$, то плоскости $A_2 B_2 C_2$ и ABC образуют тот же угол φ , что и прямые $A_1 A$ и $A_1 O$.
- По теореме о площади ортогональной проекции $S_{A_2 B_2 C_2} = S_{ABC} \cos \varphi$. Согласно теореме 3
- $V = S_{A_2 B_2 C_2} \cdot A_1 A = S_{ABC} \cos \varphi \cdot A_1 A = S_{ABC} \cdot A_1 O = S \cdot H$.



Объёмы тел и их изображение в пространстве

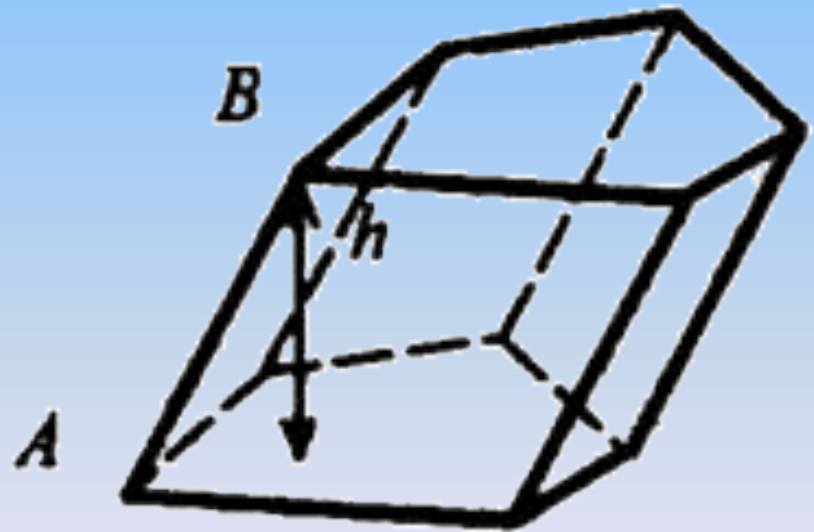
Многогранник — тело, ограниченное плоскостями.

Призма — многогранник, основания которого равные многоугольники, боковые грани — параллелограммы.

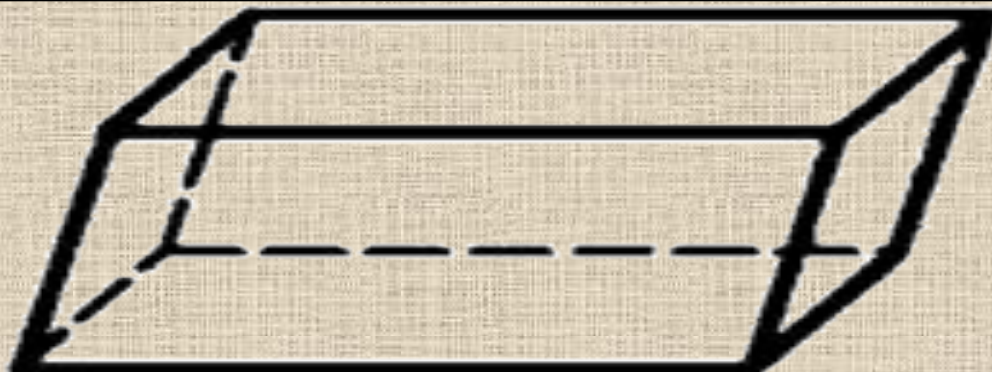
**AB — ребро;
h — высота**

Объём: $V = Sh$

S — площадь основания



- Параллелепипед — призма, у которой основания параллелограммы.
- Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке



Прямоугольный параллелепипед — у которого основания прямоугольники, а рёбра перпендикулярны основанию.

Рёбра:

a — длина, b — ширина, c — высота; d — диагональ
(все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны)

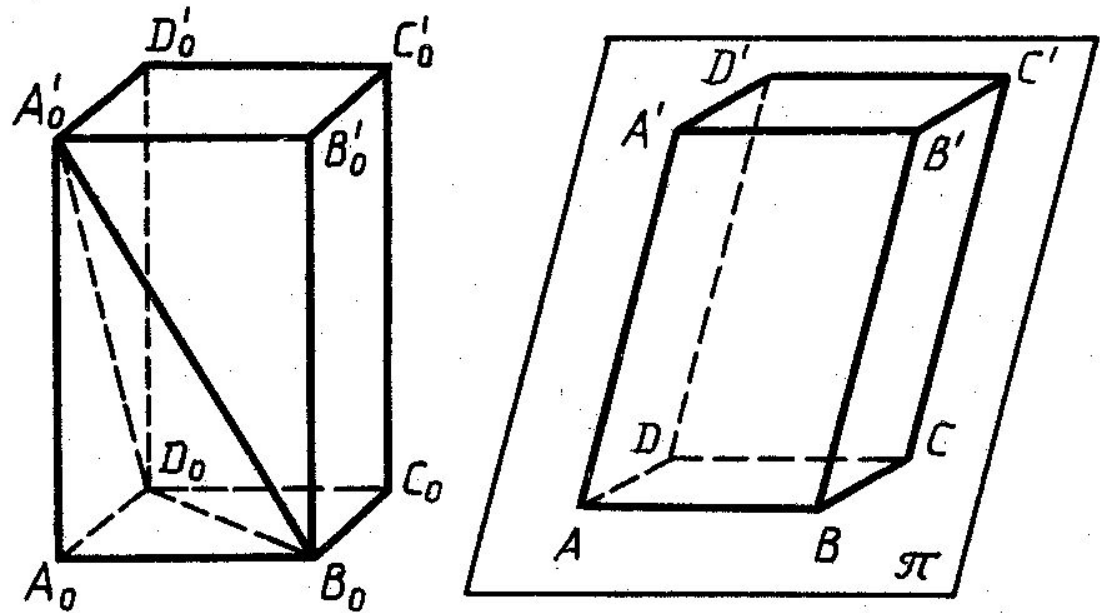
Объём: $V = a \cdot b \cdot c$

Полная поверхность: $S = 2(ab + bc + ca)$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

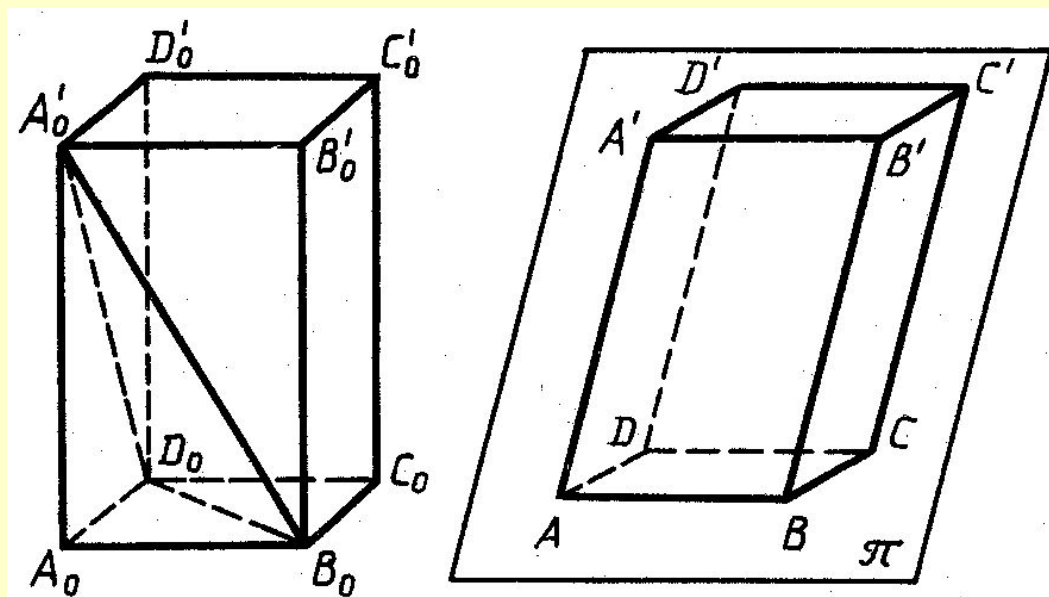
Для построения изображения произвольного параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$ заметим, что точки A_0 , B_0 , D_0 и A'_0 являются вершинами тетраэдра $A_0B_0D_0A'_0$.

Поэтому в качестве их изображения можно взять вершины произвольного четырёхугольника $ABDA'$.



Другими словами, любые три отрезка AB , CD и AA' плоскости изображения с общим концом A , ни какие два из которых не лежат на одной прямой, можно считать изображением рёбер A_0B_0 , A_0D_0 и $A_0A'_0$ параллелепипеда.

Таким образом параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$ является изображением параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0 A'_0B'_0C'_0D'_0$.



Но тогда изображения остальных рёбер строятся однозначно, так как все грани параллелепипеда являются параллелограммами, и, следовательно, их изображения также будут параллелограммами.

Куб — прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты. $a=b=c$

Число граней — 6,
форма граней — квадраты,
число ребер — 12, число вершин — 8.



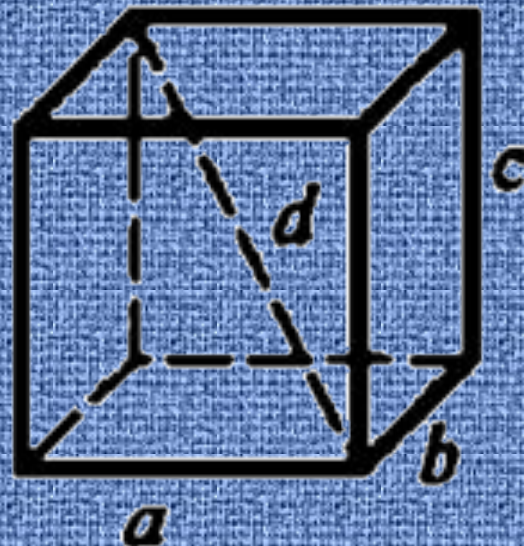
$$V = a^3$$

(отсюда и название третьей степени — «куб»),

d — диагональ

$$S = 6a^2$$

$$d^2 = 3a^2$$

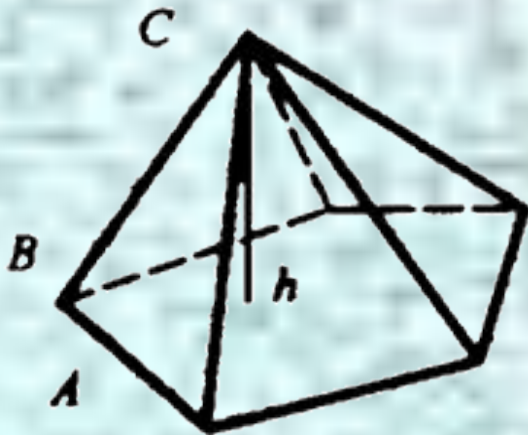
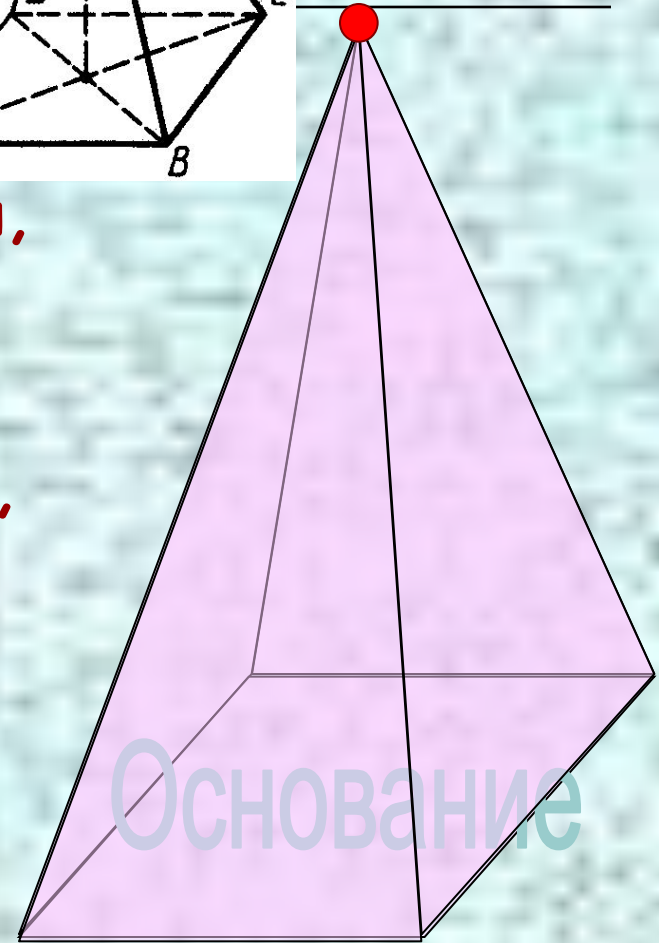
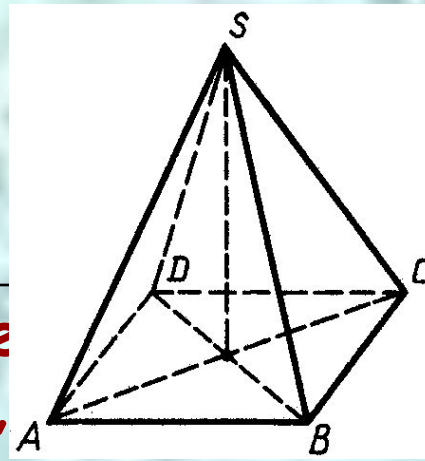


Пирамида -

многогранник, основание которого многоугольник,

а остальные грани - треугольники, имеющие общую вершину.

По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т.д.



$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Тетраэдр –

это один из пяти типов правильных многогранников;

правильная треугольная пирамида;

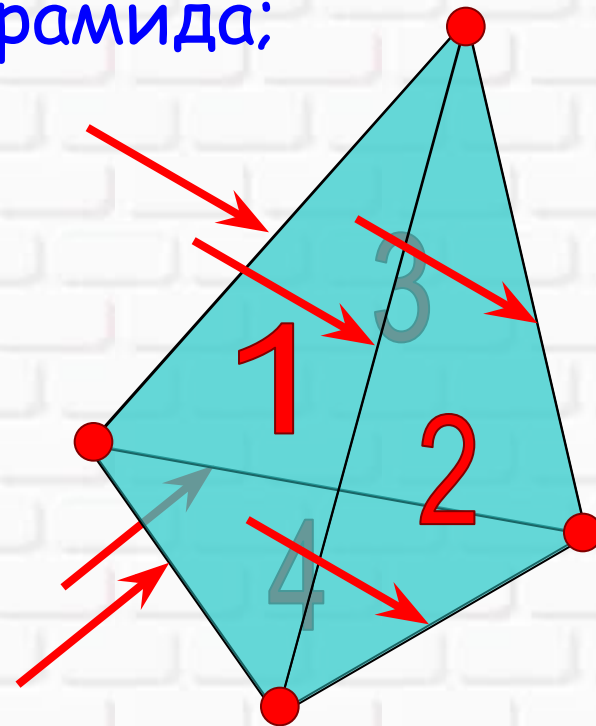
форма граней – треугольники,

Число граней – 4,

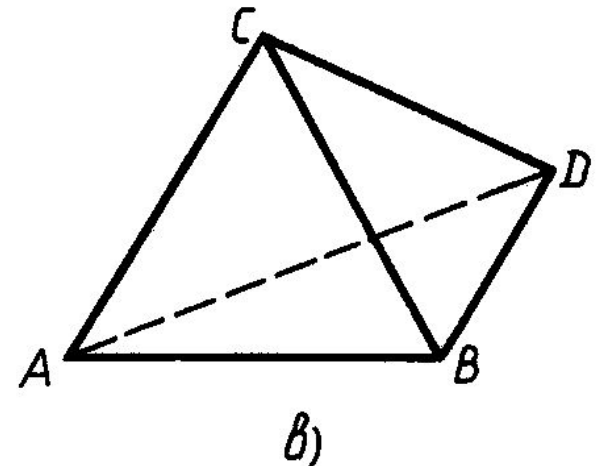
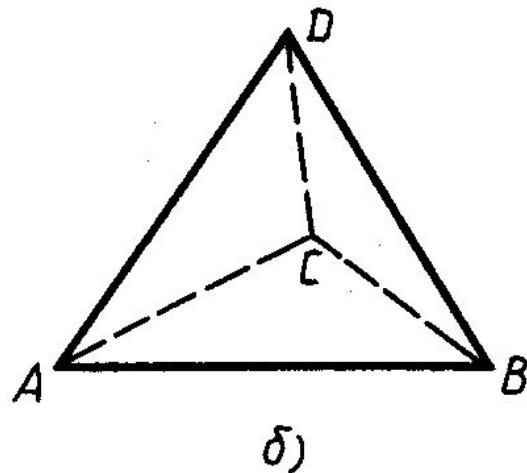
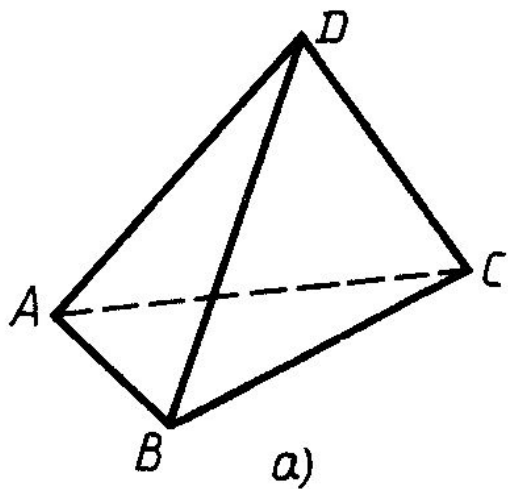
число ребер – 6,

число вершин – 4.

- Под изображением многогранника следует понимать фигуру, состоящую из проекций всех его рёбер.

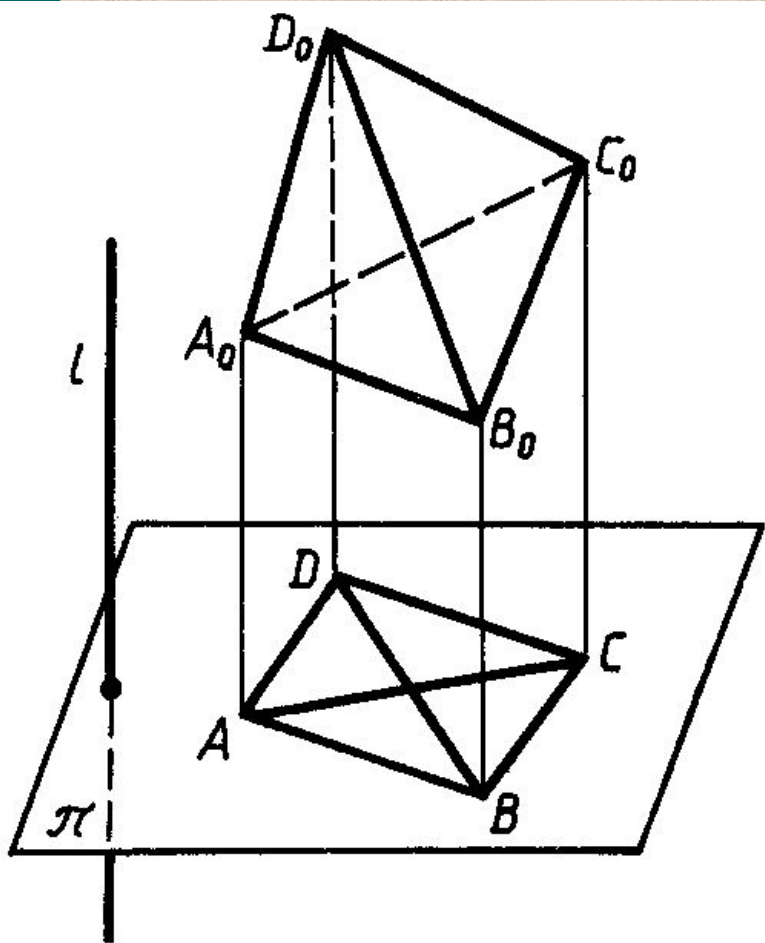


Фигура, состоящая из сторон и диагоналей любого (выпуклого или невыпуклого) четырёхугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования.



На этих рисунках невидимые рёбра изображены штриховыми линиями.

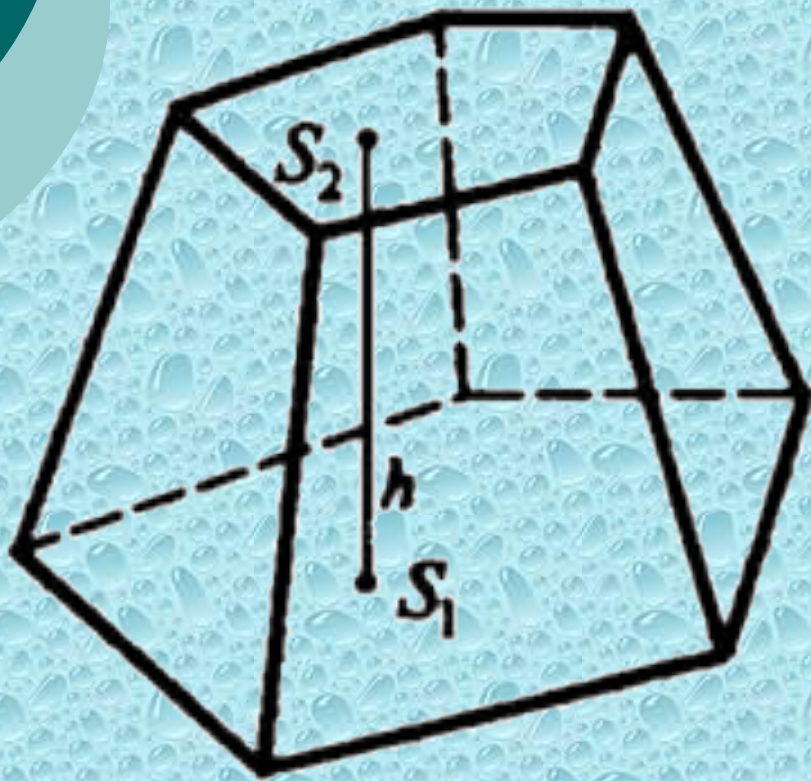
**Пусть $A_0B_0C_0D_0$ – произвольный тетраэдр,
 A, B, C и D – параллельные проекции
его вершин на плоскость изображений (π).**



*Отрезки $AB, BC, CA, AD,$
 BD, CD служат сторонами
и диагоналями
четырёхугольника $ABCD$.*

*Фигура, образованная из
этих отрезков (или любая
другая фигура, подобная ей),
является изображением
тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$.*

Усеченная пирамида – плоскость сечения которой параллельна плоскости основания.



$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

Октаэдр

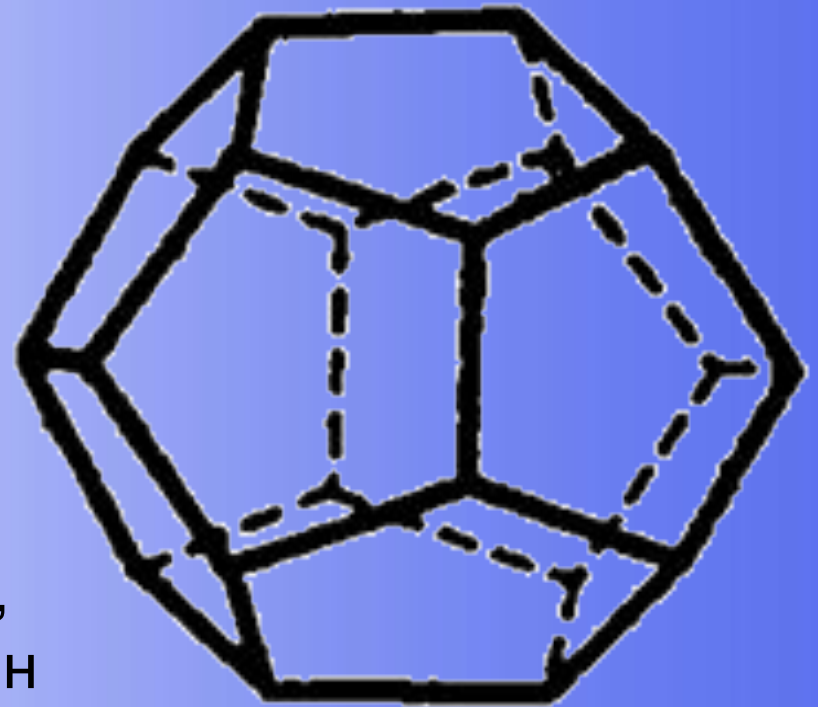
- Число граней – 8,
форма граней – треугольники,
число ребер – 12,
число вершин – 6.



ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

Додекаэдр

- Число граней – 12,
форма граней – пятиугольники,
число ребер – 30, число вершин
– 20.



ВИДЫ МНОГОГРАННИКОВ

Икосаэдр

Число граней – 20,
форма граней – треугольники,
число ребер – 30,
число вершин – 12.



ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ



h

Цилиндры.

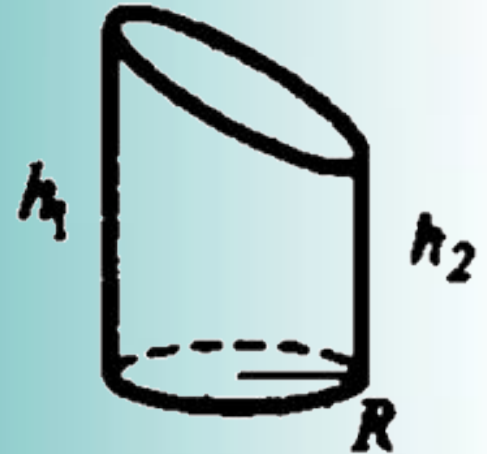
- Круглый прямой.
- Круглый усеченный

S – площадь боковой поверхности.

V – объем.

$$S = 2\pi \cdot R \cdot h$$

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$



h_1

h_2

$$S = \pi \cdot R \cdot (h_1 + h_2)$$

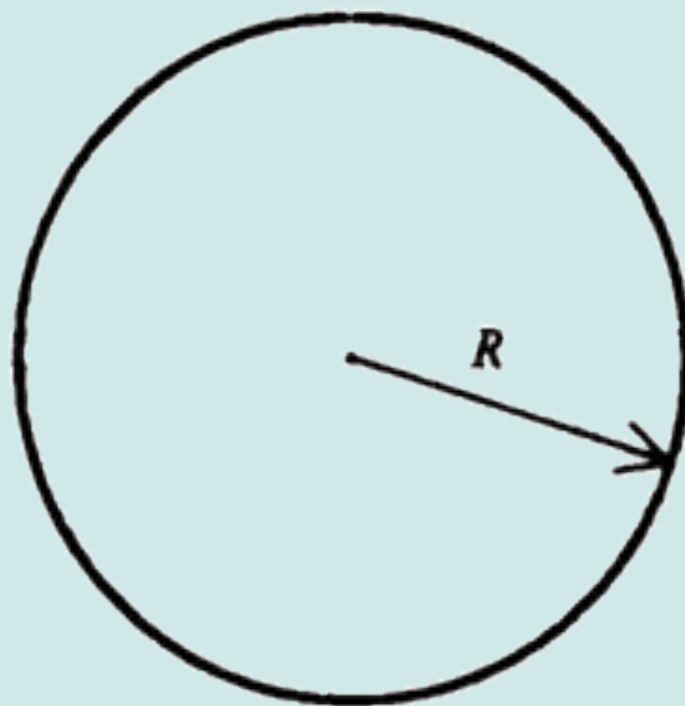
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{(h_1 + h_2)}{2}$$

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Сфера – поверхность шара

$$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$



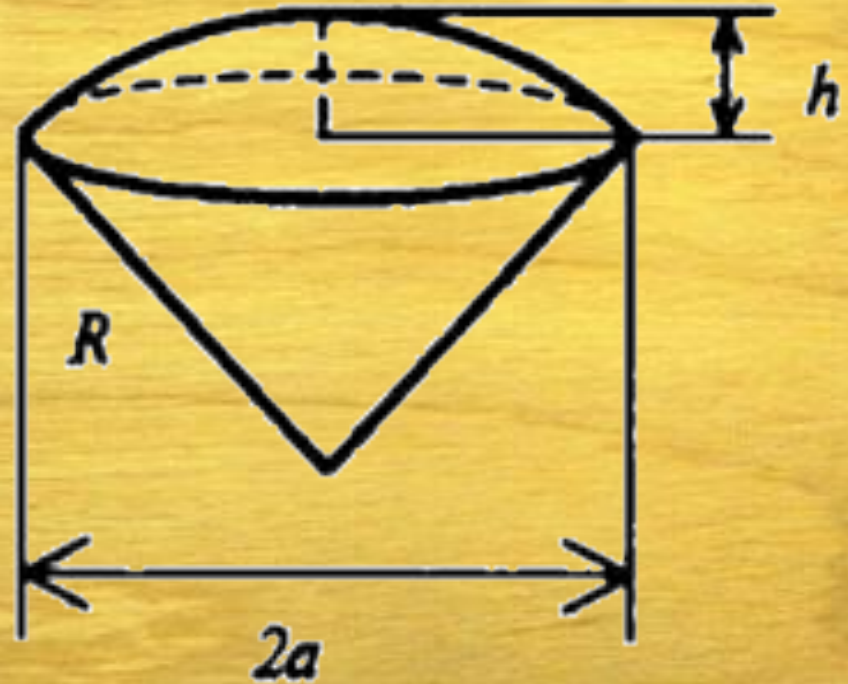
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Шаровой сектор.

R — радиус шара;
 a — радиус окружности сечения;
 h — высота отсекаемой шляпки

$$S = \pi \cdot R^2 (2h + a)$$

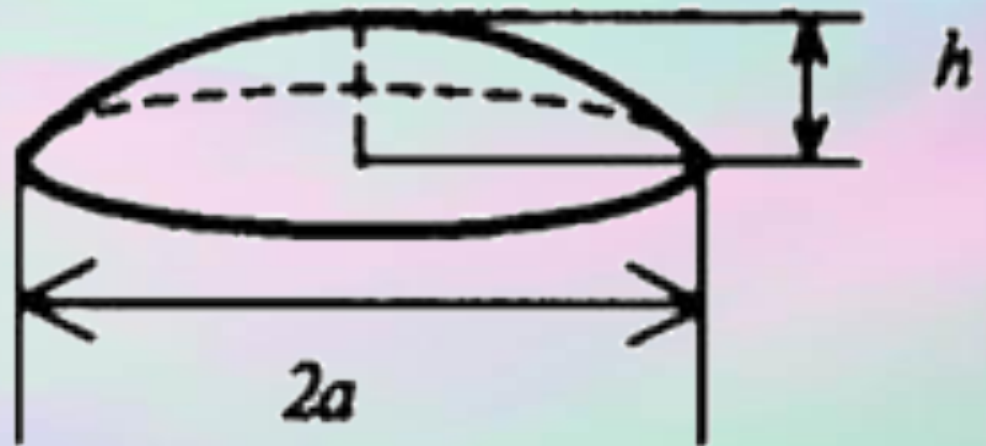
$$V = \frac{2}{3} \pi \cdot R^3 h$$



ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Шаровой сегмент

R — радиус шара;
 a — радиус
окружности
сечения;
 h — высота
отсекаемой шляпки



ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Шаровой слой

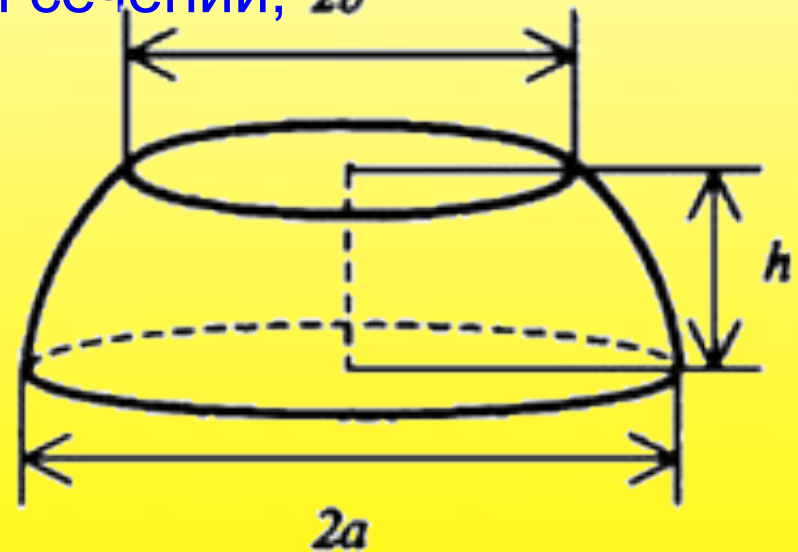
R — радиус шара,

a , b — радиусы окружностей сечений, $2b$

h — высота слоя

$$S = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$$

$$V = \frac{1}{6} \pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$$



При решении стереометрических задач высоки

требования к качеству чертежа, его
наглядности.

Нельзя научиться решать сколько-нибудь содержательные стереометрические задачи, не освоив принципы и технику построения пространственного чертежа.

- Сюда входит: выбор оптимального положения изображаемого тела (в частности, выбор ориентации - верх и низ, право и лево),
- выбор ракурса и проекции, умение минимизировать количество изображенных линий (напомним, что видимые и невидимые линии должны изображаться различным образом),
- умение строить сечения и проекции на плоскость, умение выделить на пространственном чертеже
- и соответственно изобразить плоскую конфигурацию, дающую ключ к решению задачи, умение перевести условие задачи на графический язык.

