Стохастическая модель образования очереди у однополосного регулируемого перекрёстка

В моделировании дорожного движения исторически сложилось 2 основных подхода:

Детерминистический

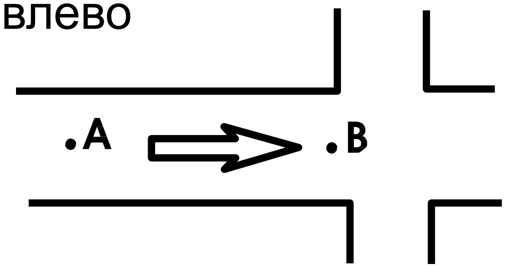
В основе детермининированных моделей лежит функциональная зависимость между отдельными показателями, например, скоростью и дистанцией между автомобилями в потоке. В стохастических моделях транспортный поток рассматривается как вероятностный процесс.

Вероятностный (стохастический)

В вероятностных моделях транспортный поток рассматривается как результат взаимодействия транспортных средств на элементах транспортной сети. В связи с жестким характером ограничений сети и массовым характером движения в транспортном потоке складываются отчетливые закономерности формирования очередей, интервалов, загрузок по полосам дороги и т. п.

Одной из важнейших характеристик перекрестка является длина очереди автомобилей, ожидающих проезда. Построим простую модель образования очереди на перекрестке со светофорным регулированием. Рассмотрим пересечение двух дорог с односторонним движением. Пусть τ^{+} – длительность горения зеленого света, а τ – длительность всего цикла светофора. Предположим, что когда для одной полосы загорелся красный свет, зеленый свет для второй полосы загорается спустя некоторое время, чтобы „проскочившие“ автомобили успели проехать.

Пусть поток автомобилей, проходящих через точку A (некоторую точку на участке дороги перед перекрестком), есть простейший поток с параметром λ, λ > 0. При накоплении автомобилей в системе точка A сдвигается влево



Модель очереди на перекрестке

Обслуживание одного автомобиля в рамках данной модели представляет собой проезд через точку В – начало перекрестка. Примем время проезда через точку В одинаковым для всех автомобилей и равным Т, **Т > 0**

За это время следующий автомобиль подъезжает к перекрестку (точке В) и ждет своего облуживания. Таким образом, поведение перекрестка будет описываться с помощью однолинейной системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием и буфером размера М (максимальное число автомобилей, способных поместиться на дороге), $\mathbf{M} \in \mathbf{N}$. Будем искать среднюю длину очереди. Допустим, что перед перекрестком может стоять не более М автомобилей, $\mathbf{M} \geq \mathbf{1}$

Подсчитаем, сколько автомобилей могут проехать перекресток за период горения зеленого света. За единицу времени через перекресток могут проехать $\mathbf{T^{-1}}$ автомобилей. Значит, на зеленый свет через перекресток могут проехать $\boldsymbol{\tau}^{+}\mathbf{T^{-1}}$ автомобилей. Таким образом, величина

$$N=[\tau^{+}T^{-1}]$$

Будем исследовать поведение системы в моменты времени **nT**, $n = \overline{0, N}$

Будем исследовать поведение системы в моменты времени **nT**, $n = \overline{0, N}$

$$P_i(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, i \geq 0.$$

Будем исследовать поведение системы в моменты времени **nT**, $\mathbf{n = \overline{0, \mathit{N}}}$

$$p_i^{(0)} = \sum_{k=0}^{i} p_k^{(N)} P_{i-k}(\tau^*), \quad i = \overline{0, M},$$

$$p_M^{(0)} = \sum_{k=0}^{M} p_k^{(N)} \sum_{l=M-k}^{\infty} P_l(\tau^*), \quad \tau^* = \tau - NT$$

$$p_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{i+1} p_k^{(n-1)} P_{i-k+1}(T), \quad i = \overline{0, M-1},$$

$$p_M^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_k^{(n-1)} \sum_{l=M-k+1}^{\infty} P_l(T), \quad n = \overline{1, N},$$

Будем исследовать поведение системы в моменты времени nT, $\mathbf{n = \overline{0, N}}$

$$\sum_{i=0}^{M} p_i^{(n)} = 1, \quad n = \overline{0, N}.$$

Обозначим через $A_i = P_i(\tau^*)$, *Aii=l=iPl*τ^*, $B_i = P_i(T)$, B_i*=i=1∞PlT, i≥0* и распишем систему (1) более подробно

(3)
$$\begin{aligned}
&p_0^{(0)} = p_0^{(N)} A_0,\\
&p_1^{(0)} = p_0^{(N)} A_1 + p_1^{(N)} A_0,\\
&\dots\\
&p_M^{(0)} = p_0^{(N)} A_M + p_1^{(N)} A_{M-1} + \dots + p_M^{(N)} A_0,
\end{aligned}$$

Где, $A_i = P_i(\tau^*)$, $B_i = P_i(T)$.

$$
\begin{aligned}
&p_0^{(n)} = p_0^{(n-1)} B_1 + p_1^{(n-1)} B_0, \\
&p_1^{(n)} = p_0^{(n-1)} B_2 + p_1^{(n-1)} B_1 + p_2^{(n-1)} B_0, \\
&\dots \\
&p_M^{(n)} = p_0^{(n-1)} \overline{B}_{M+1} + p_1^{(n-1)} \overline{B}_M + \dots + p_M^{(n-1)} \overline{B}_1, \quad n = \overline{1, N}
\end{aligned}
$$

Запишем системы (3) и (4) в матричном виде

$$
\begin{aligned}
&\vec{p}^{(0)} = \vec{p}^{(N)} \hat{A}, \\
&\vec{p}^{(1)} = \vec{p}^{(0)} \hat{B}, \\
&\vec{p}^{(2)} = \vec{p}^{(1)} \hat{B}, \\
&\dots \\
&\vec{p}^{(N)} = \vec{p}^{(N-1)} \hat{B},
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Где

$$\vec{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots, p_M^{(n)}), \quad n = \overline{0, N},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & \overline{A}_{M-1} \\ 0 & A_0 & A_1 & \ldots & \overline{A}_{M-2} \\ 0 & 0 & A_0 & \ldots & \overline{A}_{M-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{A}_0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_M & \overline{B}_{M+1} \\ B_0 & B_1 & \ldots & B_{M-1} & \overline{B}_M \\ 0 & B_0 & \ldots & B_{M-2} & \overline{B}_{M-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_0 & \overline{B}_1 \end{bmatrix},$$

Будем исследовать поведение системы в
моменты времени **nT**, $\mathbf{n} = \overline{\mathbf{0}, \boldsymbol{N}}$

$$\begin{cases} \vec{p}^{(0)} = \vec{p}^{(0)} B^N A, \\ \vec{p}^{(0)} \mathbf{1} = 1, \end{cases}$$

где, $1 = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

Остальные векторы вероятностей находим с помощью равенств:

$$\vec{p}^{(n)} = \vec{p}^{(n-1)} \hat{B}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Тогда средняя длина очереди на перекрестке к моменту
начала периода зеленого света равна:

Будем исследовать поведение системы в
моменты времени **nT**, $\mathbf{n} = \overline{\mathbf{0}, \boldsymbol{N}}$