



# Сумма бесконечной геометрической прогрессии



Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию:

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех и т. д. членов прогрессии. Получим:

$$S_1 = b_1;$$

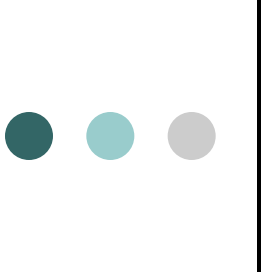
$$S_2 = b_1 + b_2;$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 ;$$

...

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

Получили последовательность  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$



Если последовательность  $S_n$  сходится к пределу  $S$ , то число  $S$  называют *суммой геометрической прогрессии*.

**!** Обратите внимание: называют не суммой  $n$  членов геометрической прогрессии, а суммой геометрической прогрессии.

Если же эта последовательность расходится, то о сумме  $n$  геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме членов -  $S_n$  можно, естественно, и в том случае.

Если знаменатель  $q$  геометрической прогрессии

$(b_n)$  удовлетворяет неравенству  $|q| < 1$ , то  
сумма прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

### Доказательство.

Как известно, сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии  $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$  может быть высчитана по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Как ранее мы установили:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}$ .

А так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  мы назвали суммой геометрической прогрессии, то формула доказана  $S = \frac{b_1}{1 - q}$ .



## Пример.

Найти сумму геометрической прогрессии:

$$27, 9, 3, 1, \dots$$

**Решение.**

Имеем:  $b_1 = 27$ ;  $q = \frac{1}{3}$ .

Так как знаменатель прогрессии  $\frac{1}{3} < 1$ , то можно

воспользоваться формулой, доказанной нами только что:

$$S = \frac{b_1}{1-q} \quad . \text{ Значит, } S = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot 3}{2} = 40.5$$

# Практические задания

1. Найдите сумму геометрической прогрессии:

а)  $32, 16, 8, 4, 2, \dots$ ;      б)  $24, -8, \frac{8}{3}, -\frac{8}{9}, \dots$

2. Вычислите:

а)  $125 + 25 + 5 + 1 + \dots$ ;      б)  $-6 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} + \frac{2}{243} - \dots$

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии  $(b_n)$ , если:

а)  $S = -\frac{9}{4}, b_1 = -3$ ;      б)  $S = 1.5, b_1 = 2$ .

4. Найдите  $n$  член геометрической прогрессии  $(b_n)$ , если:

а)  $S = 15, q = -\frac{1}{3}, n = 3$ ;      б)  $S = -20, q = -16, n = 4$ .