Свойства корня n-й степени

Повторим:

Корнем n-ой степени из неотрицательного числа a $(n = 2, 3, 4, 5, \ldots)$ называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.

Корнем нечетной степени n из отрицательного числа a $(n = 3,\ 5,\ 7, \ldots)$ называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.

$$\sqrt[n]{a}$$

a – подкоренное число, n – показатель корня

Теорема 1. Корень n-й степени $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени из этих чисел:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{ab} = x \\ \sqrt[n]{a} = y \\ \sqrt[n]{b} = z \end{array}\right\} \Rightarrow x = yz \qquad \begin{array}{l} \sqrt[n]{ab} = x \Leftrightarrow ab = \boldsymbol{x^n} \\ \sqrt[n]{a} = y \Leftrightarrow a = \boldsymbol{y^n} \\ \sqrt[n]{b} = z \Leftrightarrow b = \boldsymbol{z^n} \end{array}$$

$$ab = a \cdot b$$

$$= \quad \cdot \quad \Leftrightarrow x^n = (y \cdot z)^n \Rightarrow x = yz$$

Теорема 2. Если $a \geq 0$, $b > 0$ и n – натуральное число, $n > 1$, то справедливо равенство

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = x \\ \sqrt[n]{a} = y \\ \sqrt[n]{b} = z \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x \Leftrightarrow ab = \boldsymbol{x^n}$$

$$\sqrt[n]{a} = y \Leftrightarrow a = \boldsymbol{y^n}$$

$$\sqrt[n]{b} = z \Leftrightarrow b = \boldsymbol{z^n}$$

$$= \frac{\;}{\;} \Leftrightarrow x^n = \left(\frac{y}{z}\right)^n \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

Пример:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Ответ: 60.

Пример:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Вычислить $\sqrt[4]{\frac{16}{0,0625}}$.

Решение:

$$\sqrt[4]{\frac{16}{0,0625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{0,0625}} = \frac{2}{0,5} = 4$$

Ответ: 4.

Теорема 3. Если $a \geq 0$, k – натуральное число и n – натуральное число, $n > 1$, то справедливо равенство

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Доказательство:

$$k = 3 \Rightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^3 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[n]{a^3}$$

Теорема 4. Если $a \geq 0$, k и n – натуральное число, $n > 1$, $k > 1$, то справедливо равенство

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Пример:

Вычислить: а) $\sqrt[3]{8+27}$; б) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{8+27}=\sqrt[3]{35}$

б) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}=2+3=5$

$\sqrt[3]{35}\neq 5$

$$\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a-b}\neq\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$$

Теорема 5. Если показатели корня и степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$$

$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$

Доказательство:

$\sqrt[np]{a^{kp}} = x \Rightarrow a^{kp} = x^{np}$

$\sqrt[n]{a^k} = y \Rightarrow a^k = y^n \Leftrightarrow a^{kp} = y^{np}$

$x^{np} = y^{np} \Leftrightarrow x = y$

Пример:

Преобразовать выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Решение:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{\boldsymbol{a^3}}$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{\boldsymbol{a^2}}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \qquad \cdot \qquad = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}$$

Ответ: $\sqrt[6]{a^5}$.

Пример:

Привести радикалы к одинаковому показателю корня $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{2}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{3^5}$$

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^3}$$

Пример:

Решить уравнение $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5x}+13+\frac{\sqrt[3]{5x}}{5}=2\sqrt[3]{5x}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{5x}=y$$

$$\frac{1}{2}y+13+\frac{y}{5}=2y \Leftrightarrow \frac{1}{2}y+\frac{y}{5}-2y=-13 \Leftrightarrow -1{,}3y=-13 \Leftrightarrow y=10$$

$$\sqrt[3]{5x}=10 \Leftrightarrow 5x=1000 \Leftrightarrow x=200$$

Ответ: $x=200$.

Пример:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Вычислить $\sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{37}}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{37}} = \sqrt[3]{\left(8-\sqrt{37}\right)\left(8+\sqrt{37}\right)} = \sqrt[3]{8^2-\left(\sqrt{37}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{64-37} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Ответ: 3.

Свойства $\sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, n – натуральное число:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Пример:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Вычислить $\sqrt[3]{-135} \cdot \sqrt[3]{25}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{-135} = \sqrt[3]{-27 \cdot 5} = -\sqrt[3]{27 \cdot 5}$$

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$\sqrt[3]{-135} \cdot \sqrt[3]{25} = -\sqrt[3]{27 \cdot 5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = -\sqrt[3]{27 \cdot 5 \cdot 5^2} = -\sqrt[3]{27 \cdot 5^3} = -\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{5^3} =$$

$$= -3 \cdot 5 = -15$$

Ответ: -15.