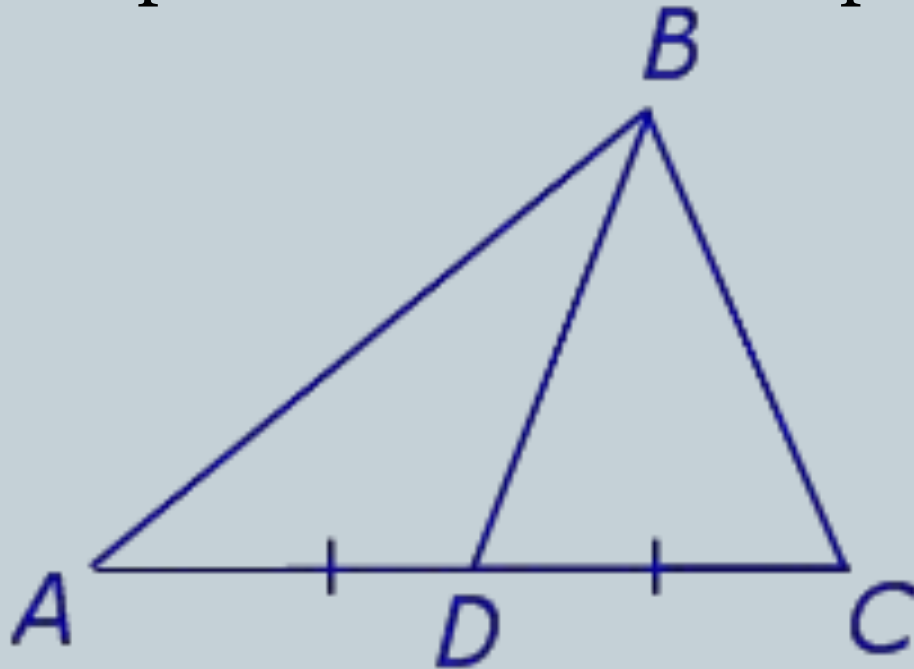


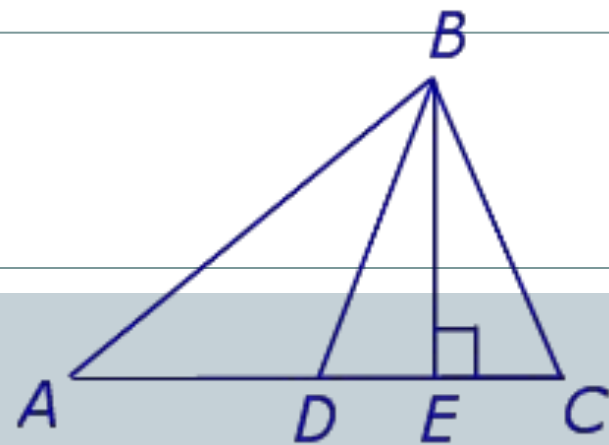
**ТЕОРЕМА О МЕДИАНЕ.
ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ**

Что такое медиана треугольника?



- Медиана треугольника- это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.





Утверждение 1.

Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади (равновеликих треугольника).

Доказательство.

Проведем из вершины В треугольника АВС медиану ВD и высоту ВЕ, заметим,

что

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE, \quad S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE.$$

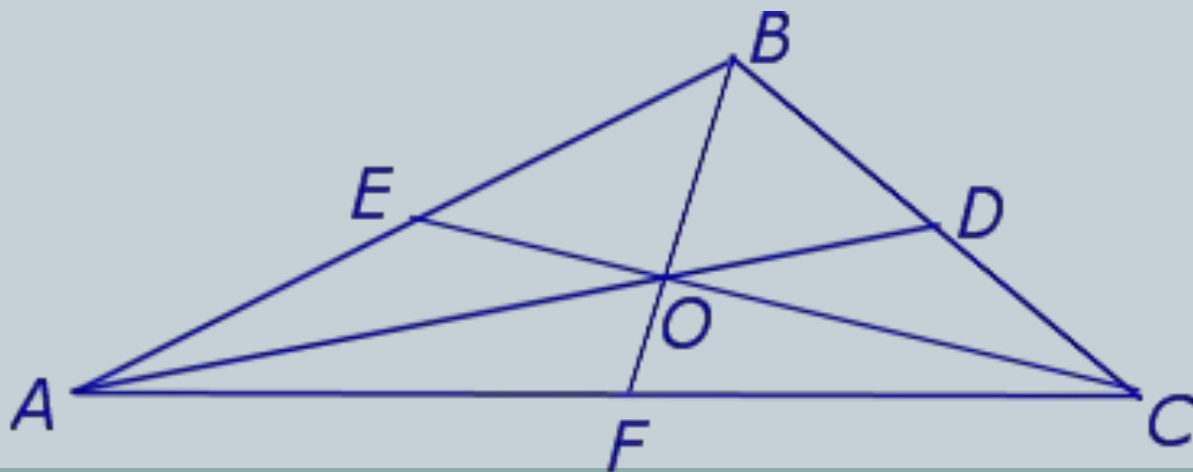
Поскольку отрезок ВD является медианой, то

$$AD = DC \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBC},$$

что и требовалось доказать.



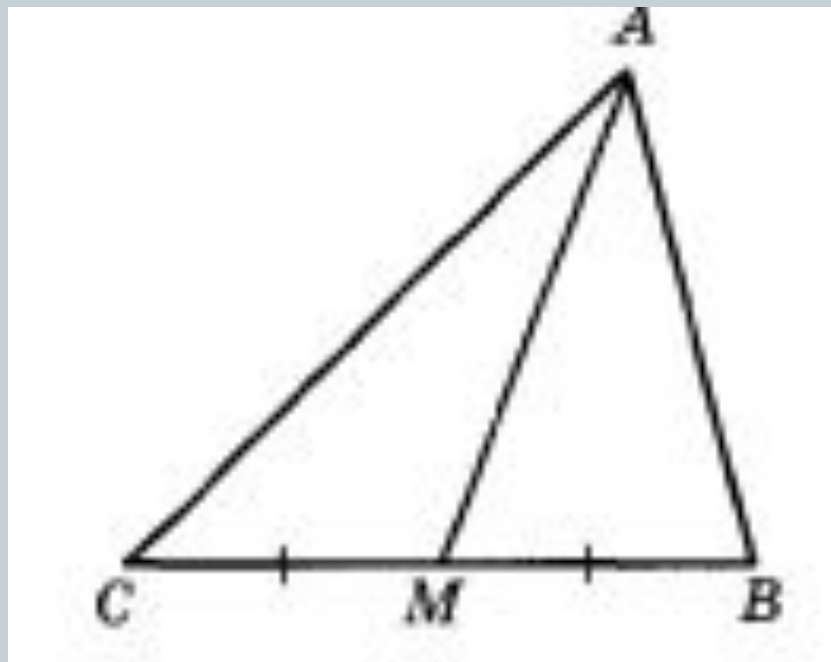
- **Утверждение 2.** Точка пересечения двух любых медиан треугольника делит каждую из этих медиан в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника.
- **Утверждение 3.** Медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих треугольников

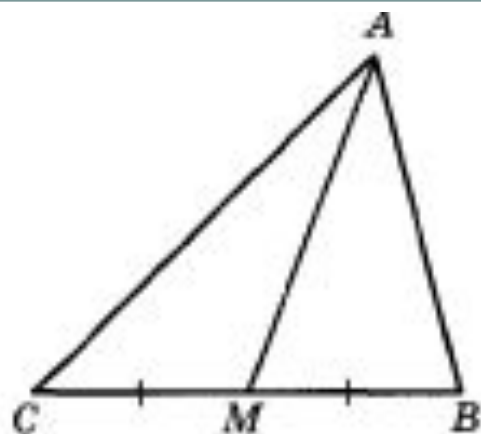




- **Длина медианы** треугольника вычисляется **по формуле:**

$$AM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$





Доказательство

Зная стороны треугольника ABC , можно найти, например, косинус угла B . Для этого нужно воспользоваться теоремой косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$, откуда

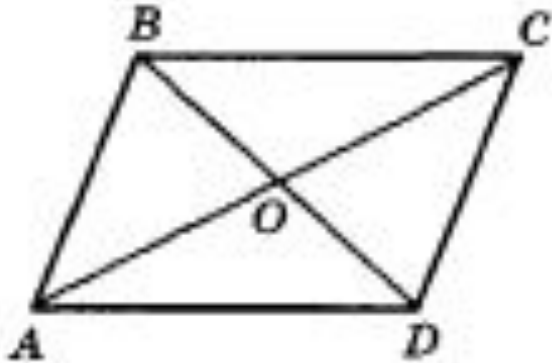
$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}.$$

Рассмотрим теперь треугольник ABM . Учитывая, что $BM = \frac{BC}{2}$, по теореме косинусов находим:

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + \frac{BC^2}{4} - 2AB \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \\ &= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма
равна сумме квадратов его сторон.



Поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то отрезок AO , равный половине AC , является медианой треугольника ABD . Следовательно, $AC^2 = 4AO^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2$, откуда $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2$, что и требовалось доказать.

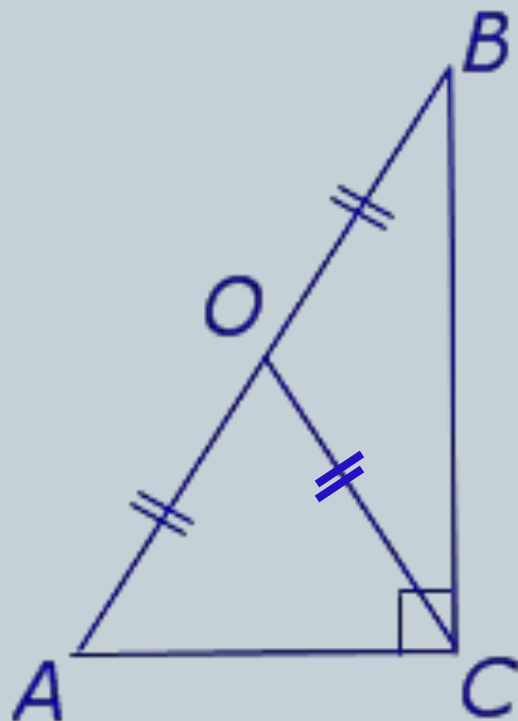


- **Следствие.** Длины медиан и длины сторон треугольника связаны формулой

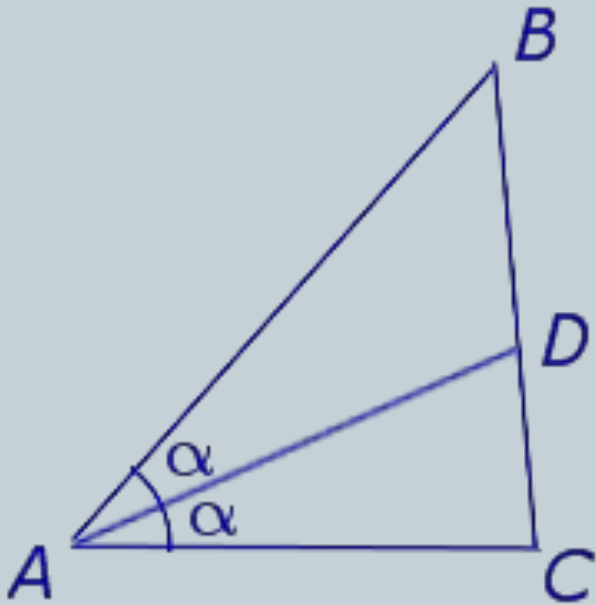
$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$



- Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.



Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам



$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

В треугольнике ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и биссектрисой AD имеют место равенства:

$$DB = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{ab}{b+c}. \quad (1)$$

Для **длины биссектрисы** справедлива **формула**:

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

$$AD = \sqrt{bc - a_1 a_2}$$



- Точка пересечения биссектрис O делит биссектрису CD

$$\frac{CO}{DO} = \frac{a + b}{c}$$

- (теорема Ван-Обеля)