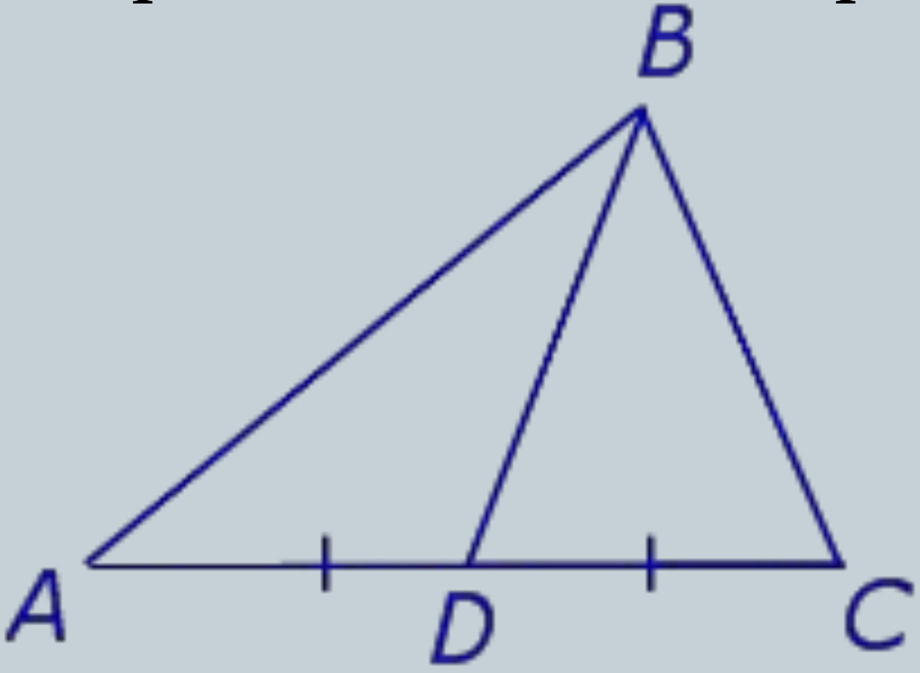
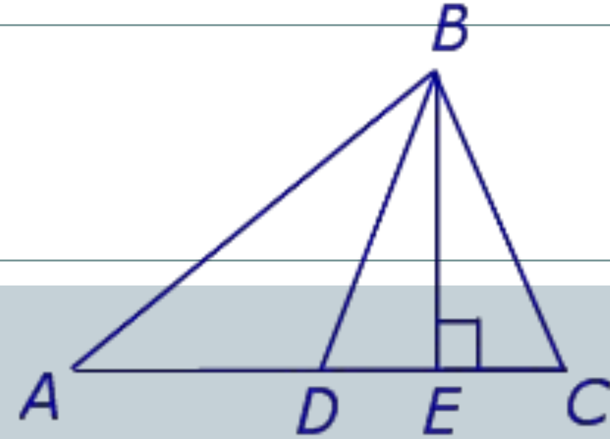
ТЕОРЕМА О МЕДИАНЕ. ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ

Что такое медиана треугольника?

- Медиана треугольника- это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.





Утверждение 1.
Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади (равновеликих треугольника).
Доказательство.
Проведем из
вершины B треугольника ABC медиану BD и высоту BE, заметим,
что

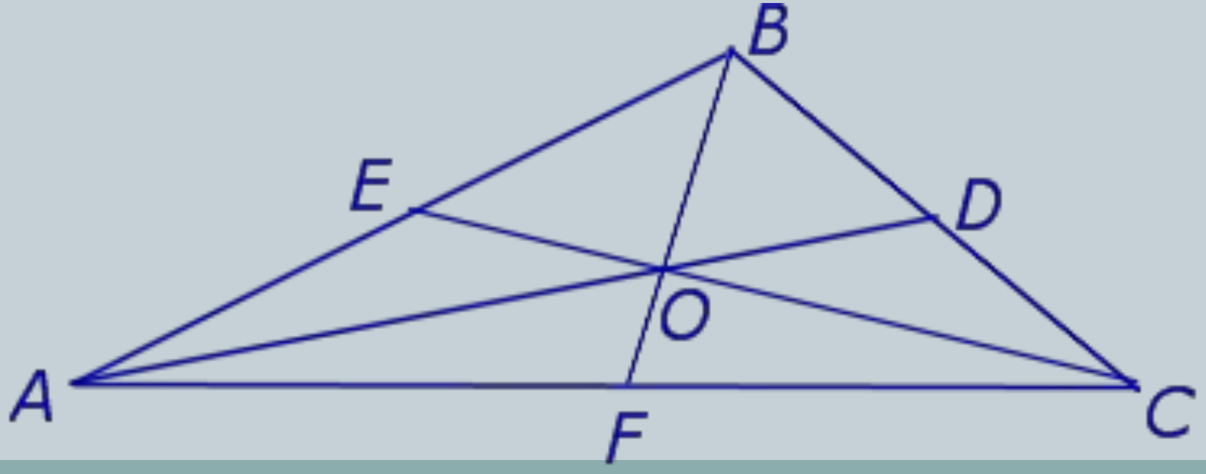
$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE, \qquad S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE.$$

Поскольку отрезок BD является медианой, то

$$AD = DC \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC},$$

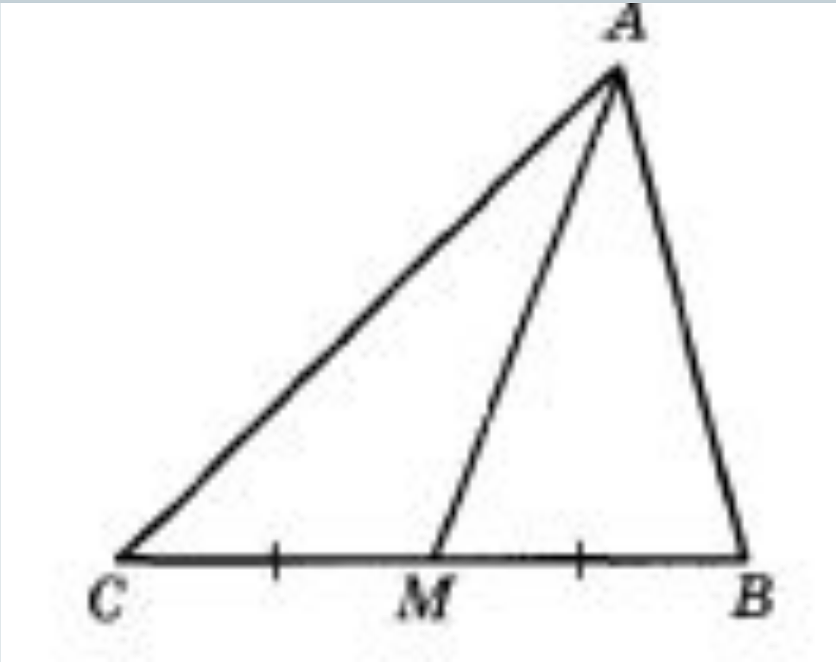
что и требовалось доказать.

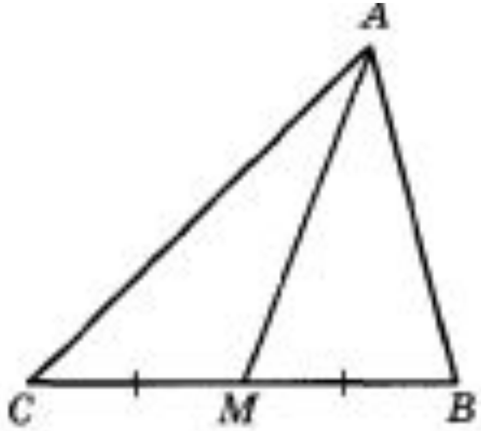
- ***Утверждение 2***. Точка пересечения двух любых медиан треугольника делит каждую из этих медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.
- ***Утверждение 3***. Медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих треугольников



- ***Длина медианы*** треугольника вычисляется ***по формуле***:

$$AM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$





Доказательство

Зная стороны треугольника ABC, можно найти, например, косинус угла B. Для этого нужно воспользоваться теоремой косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$, откуда

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\,AB \cdot BC}.$$

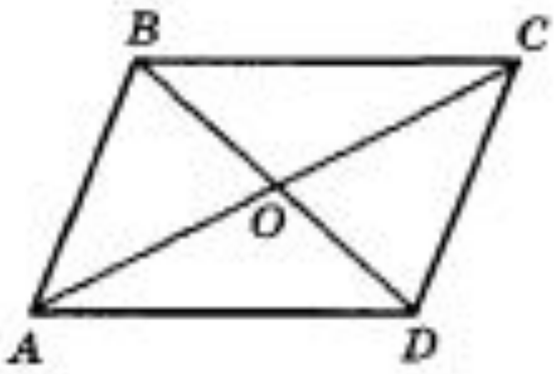
Рассмотрим теперь треугольник ABM. Учитывая, что $BM = \frac{BC}{2}$, по теореме косинусов находим:

$$AM^2 = AB^2 + \frac{BC^2}{4} - 2AB \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\,AB \cdot BC} =$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

Теорема доказана.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

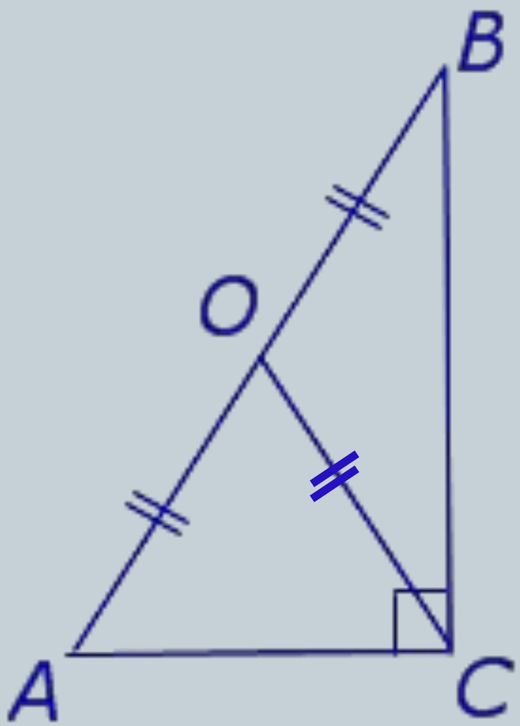


Поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то отрезок AO, равный половине AC, является медианой треугольника ABD. Следовательно, $AC^2 = 4AO^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2$, откуда $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2$, что и требовалось доказать.

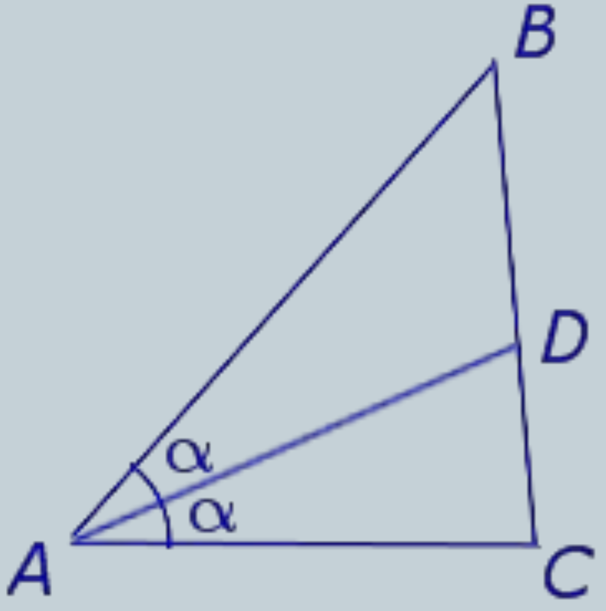
- ***Следствие***. Длины медиан и длины сторон треугольника связаны формулой

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

- Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.



Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам



$$\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$$

В треугольнике ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и биссектрисой AD имеют место равенства:

$$DB = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{ab}{b+c}. \qquad (1)$$

Для **длины биссектрисы** справедлива **формула**:

$$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

$$AD = \sqrt{bc - a_1 a_2}$$

- Точка пересечения биссектрис О делит биссектрису CD

$$\frac{CO}{DO} = \frac{a+b}{c}$$

- (теорема Ван-Обеля)