

Тема: Свойства медиан в прямоугольном треугольнике



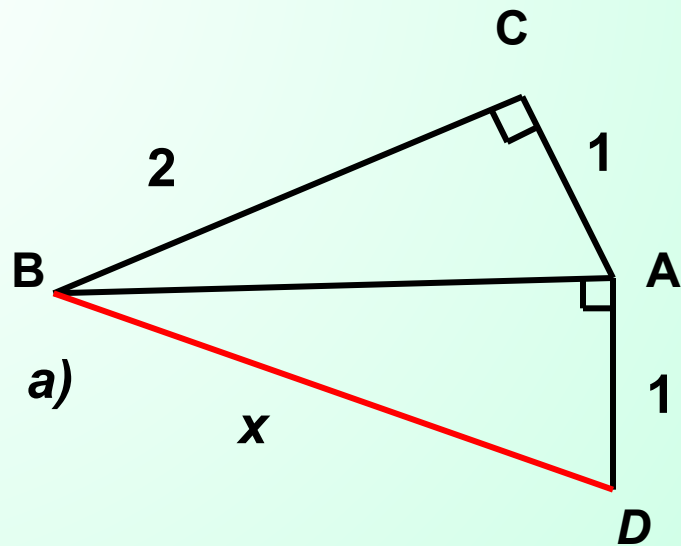
Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них - это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень.

И.Кеплер

Пифагор Самосский

Ок. 580 – ок. 500 г. до н.

э.



Из $\triangle ABC$ ($\angle C=90^\circ$)

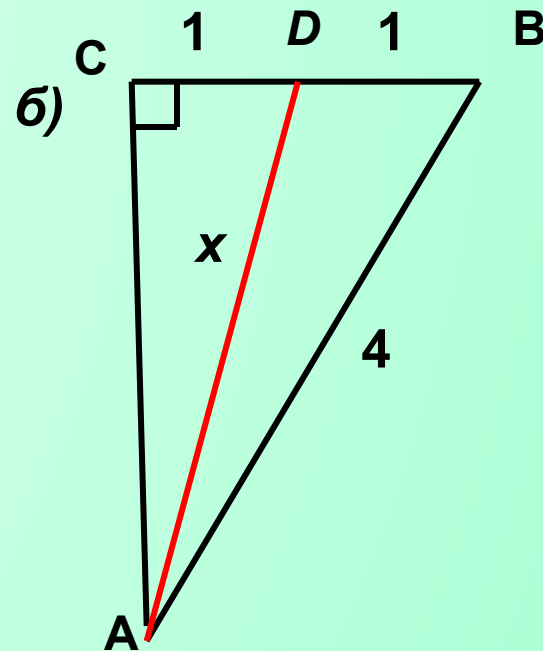
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AB^2 = 5$$

Из $\triangle DBA$ ($\angle A=90^\circ$)

$$x^2 = AB^2 + AD^2$$

$$x^2 = 6$$



Из $\triangle ABC$ ($\angle C=90^\circ$)

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

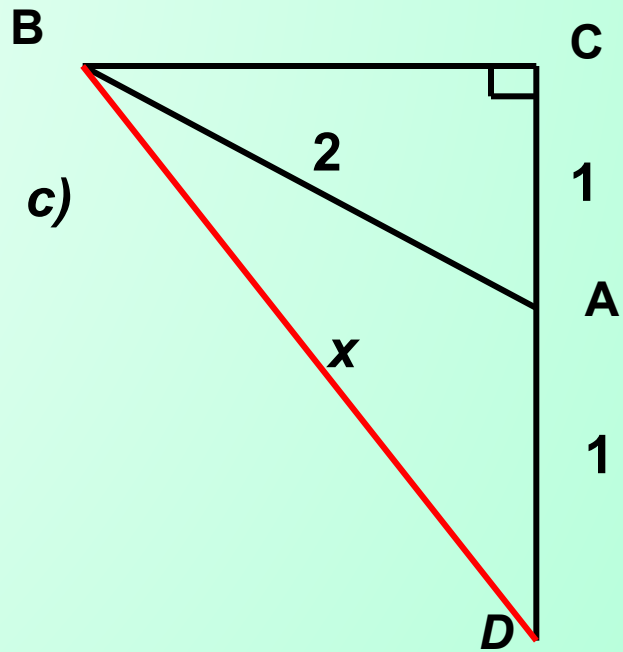
$$AC^2 = 12$$

Из $\triangle ADC$ ($\angle C=90^\circ$)

$$x^2 = AC^2 + CD^2$$

$$x^2 = 13$$





Из $\triangle ABC$ ($\angle C=90^\circ$)

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$BC^2 = 3$$

Из $\triangle BCD$ ($\angle C=90^\circ$)

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$BD^2 = 7$$

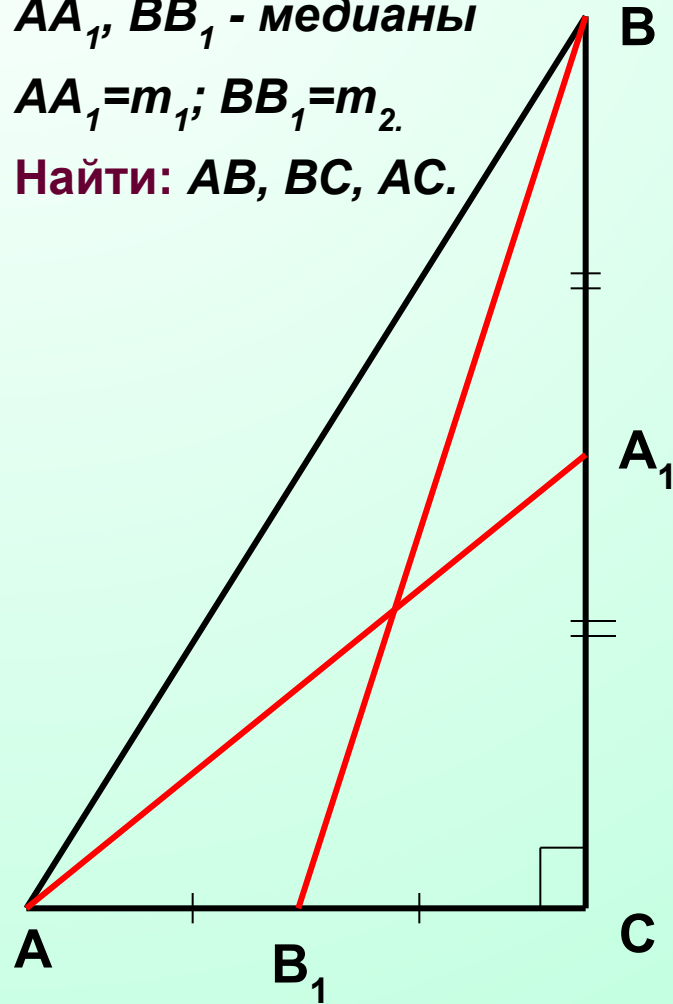
Тема: Свойства медиан в прямоугольном треугольнике

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$

AA_1 , BB_1 - медианы

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$.

Найти: AB , BC , AC .



Решение. $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Из $\triangle AA_1C$ ($\angle C=90^\circ$) по теореме Пифагора

$$AA_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Из $\triangle B_1BC$ ($\angle C=90^\circ$) по теореме

Пифагора

$$BB_1^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

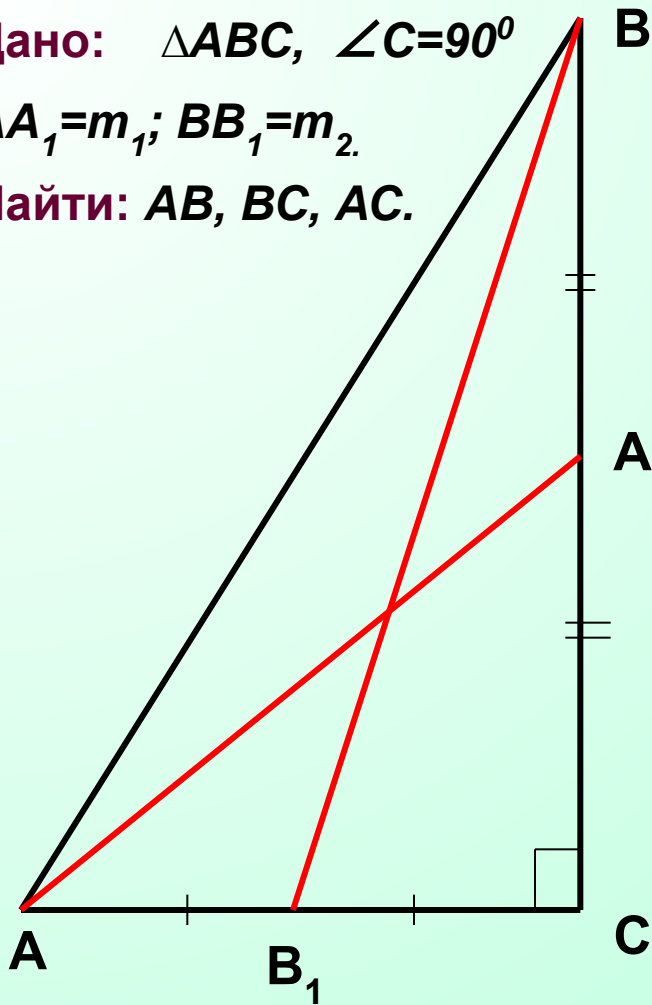
$$\begin{cases} m_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ m_2^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = m_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ m_2^2 = a^2 + \frac{m_1^2 - \frac{a^2}{4}}{2} \end{cases}$$

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$.

Найти: AB , BC , AC .



$$m_2^2 = a^2 + \frac{m_1^2 - a^2}{4}$$

$$4m_2^2 = 4a^2 + m_1^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$4m_2^2 - m_1^2 = \frac{15}{4}a^2$$

$$a^2 = \frac{4}{15}(4m_2^2 - m_1^2)$$

$$b^2 = m_1^2 - \frac{1}{15}(4m_2^2 - m_1^2) = \frac{16}{15}m_1^2 - \frac{4}{15}m_2^2$$

$$b^2 = \frac{4}{15}(4m_1^2 - m_2^2)$$

$$c^2 = \frac{16}{15}m_2^2 - \frac{4}{15}m_1^2 + \frac{16}{15}m_1^2 - \frac{4}{15}m_2^2 = \frac{4}{5}m_2^2 + \frac{4}{5}m_1^2$$

$$c^2 = \frac{4}{5}(m_1^2 + m_2^2)$$

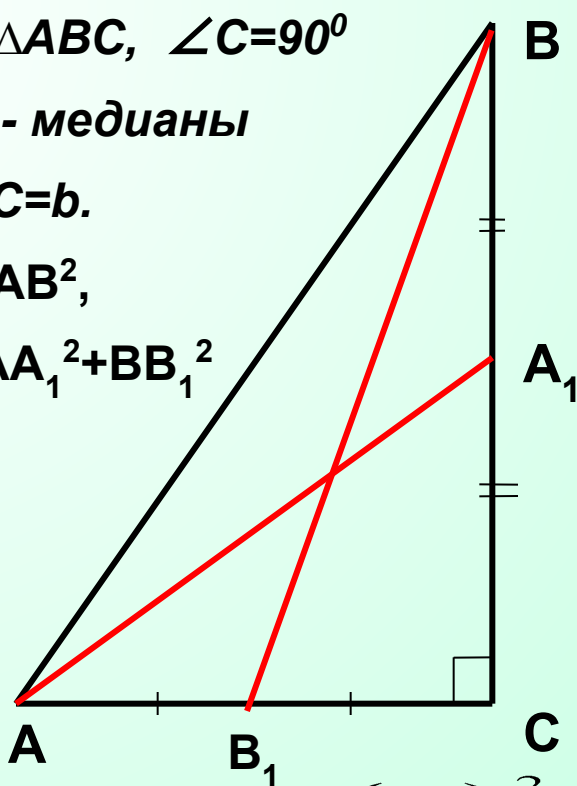
Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$

AA_1, BB_1 - медианы

$BC=a$, $AC=b$.

Найти: AB^2 ,

$AA_1^2 + BB_1^2$



$$AA_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

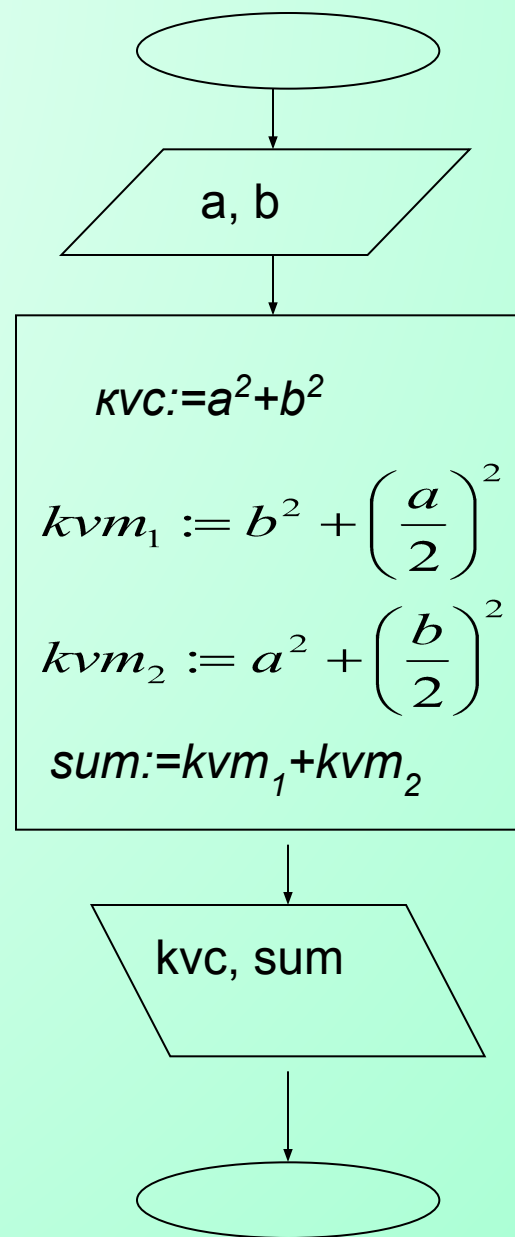
$$BB_1^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Введем обозначения:

$$AB^2 = kvc$$

$$AA_1^2 = kvm_1$$

$$BB_1^2 = kvm_2$$



a	b	c²	m₁²+m₂²
13	84		
36	77		
51	68		

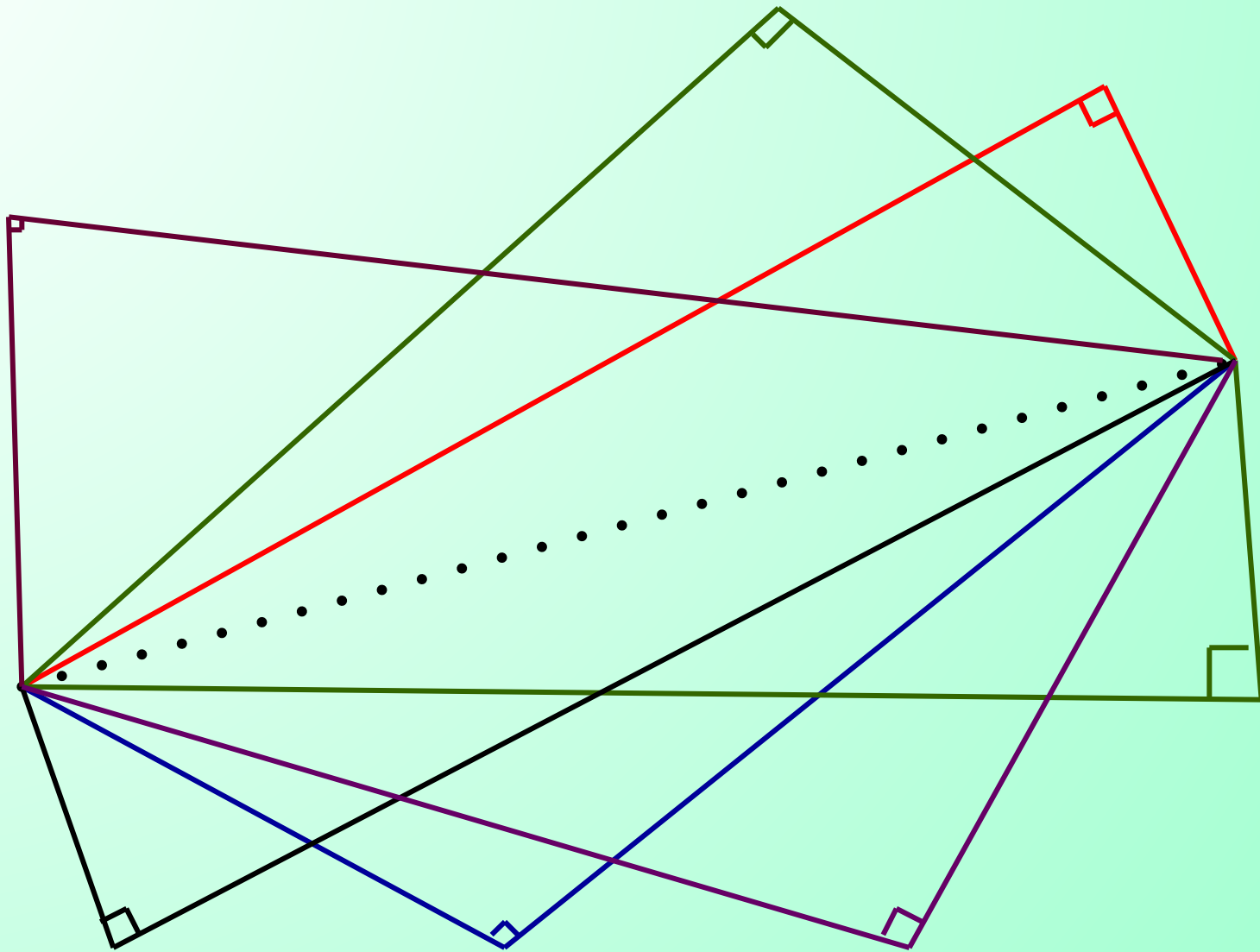
a	b	c²	m₁²+m₂²
16	63		
25	60		
39	52		

a	b	c²	m₁²+m₂²
30	25		
39	2		
38	9		

a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
13	84	7225	9031
36	77	7225	9031
51	68	7225	9031

a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
16	63	4225	5281
25	60	4225	5281
39	52	4225	5281

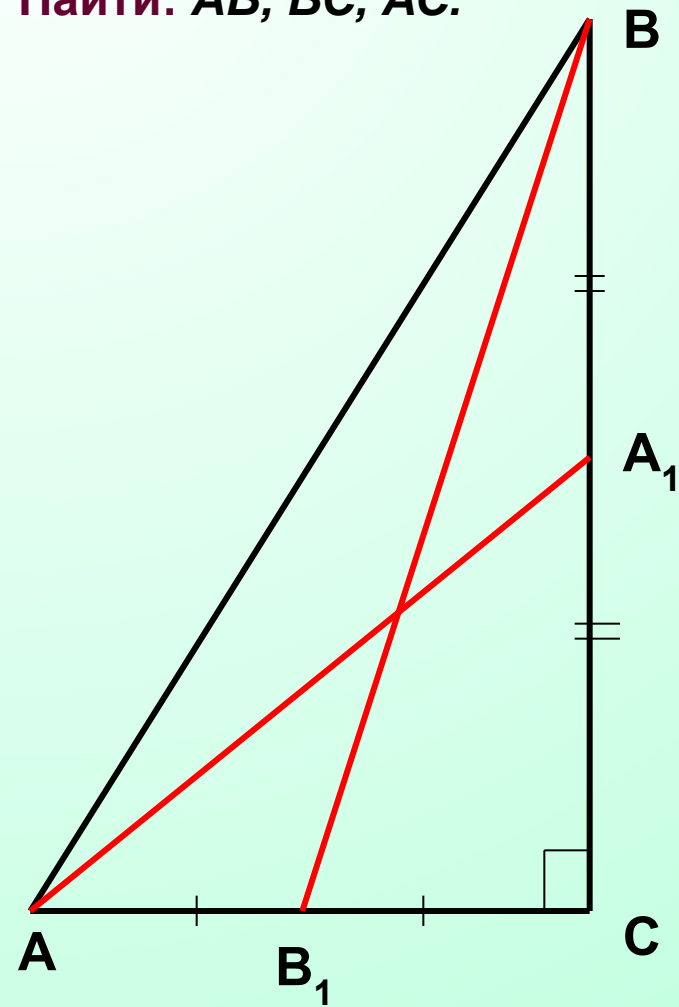
a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
30	25	1525	1906
39	2	1525	1906
38	9	1525	1906



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$.

Найти: AB , BC , AC .



Если в прямоугольном треугольнике гипотенуза постоянна, а меняются только катеты, то сумма квадратов медиан величина постоянная

$$\begin{cases} m_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ m_2^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

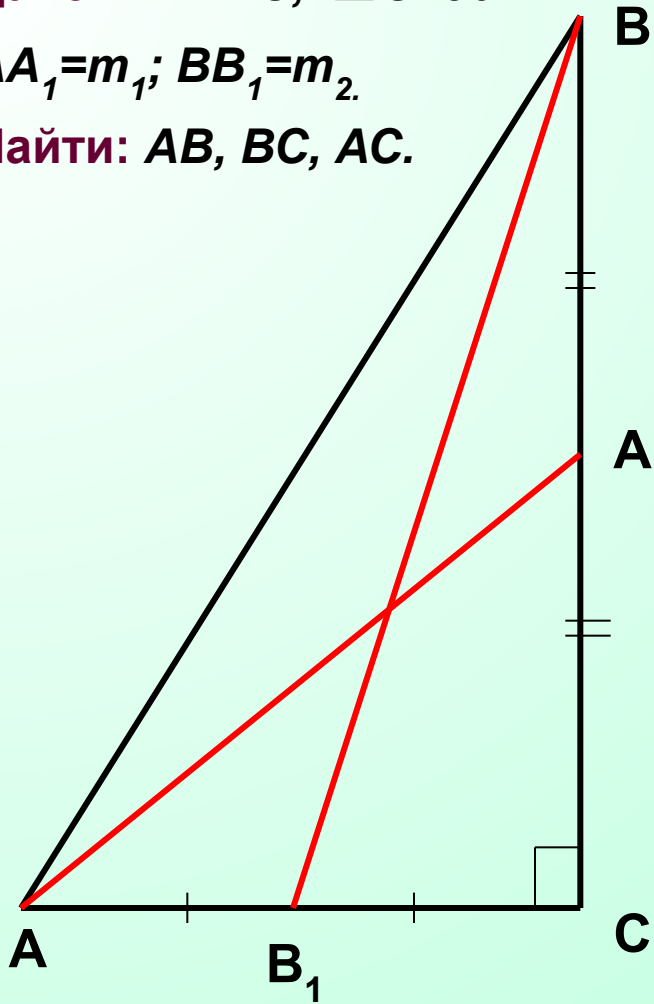
$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{5}{4}c^2$$

$$c^2 = \frac{4}{5}(m_1^2 + m_2^2)$$

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$.

Найти: AB , BC , AC .



$$\begin{cases} b^2 = c^2 - a^2 \\ m_1^2 = c^2 - a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{4}{3}(c^2 - m_1^2)$$

$$a^2 = \frac{4}{15}(4m_2^2 - m_1^2)$$

$$b^2 = -\frac{1}{3}c^2 + \frac{4}{3}m_1^2$$

$$b^2 = \frac{4}{15}(4m_1^2 - m_2^2)$$

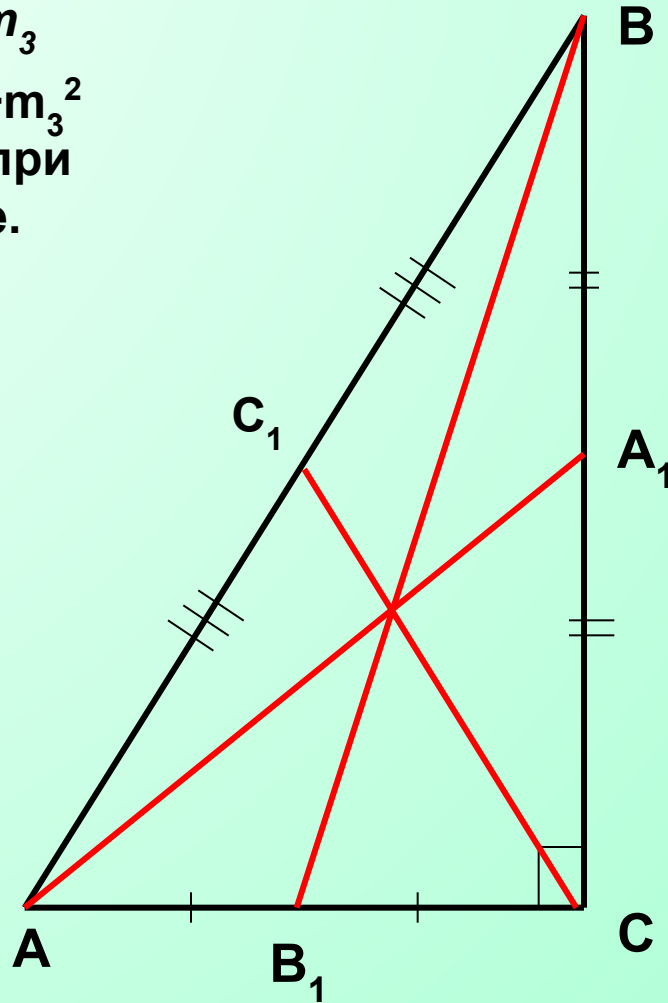
Домашнее задание

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$

AA_1 , BB_1 , CC_1 - медианы

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$, $CC_1=m_3$

Доказать, что $m_1^2+m_2^2+m_3^2$
величина постоянная при
постоянной гипотенузе.



Тема: Свойства медиан в прямоугольном треугольнике



Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них - это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень.

И.Кеплер

Пифагор Самосский

Ок. 580 – ок. 500 г. до н.

э.