

МАСТЕР-КЛАСС

**Элективный курс по математике, как
один из важных инструментов
реализации задач профильного
обучения**

**Косолапова Л.В.,
учитель математики МОУ СОШ
им. А.С. Попова
городского округа Власиха
Московской области**

Тема элективного занятия:
**«ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ
ФУНКЦИИ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ,
СОДЕРЖАЩИХ АРКФУНКЦИИ»**

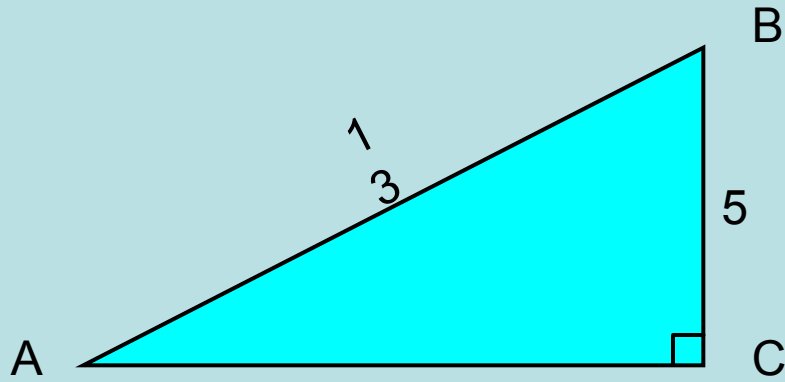
ЦЕЛИ УРОКА:

- 1. Обобщить, систематизировать и углубить знания и умения учащихся по теме «Обратные тригонометрические функции. Решение уравнений, содержащих аркфункции».**
- 2. Прививать интерес к исследовательской деятельности и работе в группах.**
- 3. Научить применять полученные на уроках знания в измененной ситуации, успешно справляться с задачами повышенной сложности и нестандартными задачами с целью подготовки к успешной сдаче ЕГЭ.**

ПЛАН УРОКА

- Исследовательская работа
- Устные упражнения
- Проверка домашнего задания
- Решение уравнений
- Работа в группах
- Подведение итогов

Исследовательская работа



а) Найти: $\angle A$ и $\angle B$

Ответ: $\angle A = \arcsin \frac{5}{13}$

$$\angle B = \arccos \frac{5}{13}$$

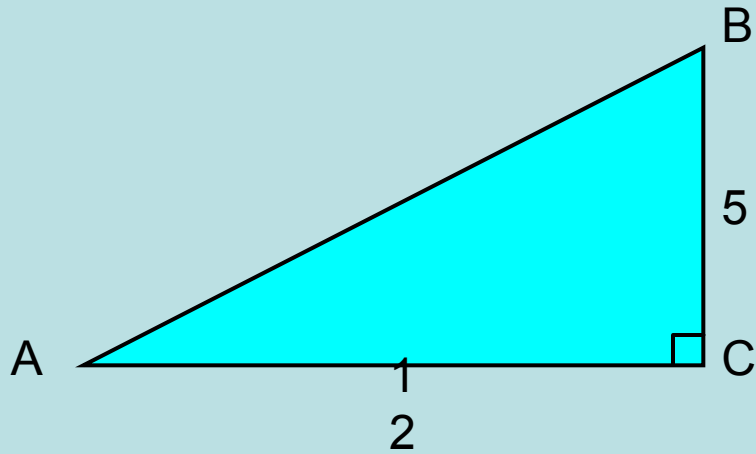
б) Вычислить: $\arcsin \frac{5}{13} + \arccos \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$

Вывод:

При всех допустимых значениях x верно равенство:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Исследовательская работа



в) Найти: $\angle A$ и $\angle B$

Ответ:

$$\angle A = \arctg \frac{5}{12} = \text{arcctg} \frac{12}{5}$$

$$\angle B = \text{arcctg} \frac{5}{12} = \arctg \frac{12}{5}$$

г) Вычислить:

$$\arctg \frac{5}{12} + \text{arcctg} \frac{5}{12} = \frac{\pi}{2}$$

Вывод: $\arctg x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

$$\arctg \frac{a}{b} = \text{arcctg} \frac{b}{a}$$

Устные упражнения

1. Найдите значение выражения:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Решение:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{13\pi}{12}$$

Устные упражнения

2. Укажите область определения функции:

$$y = \arcsin(2x - 5)$$

Решение:

$$D(y): -1 \leq 2x - 5 \leq 1; \quad 4 \leq 2x \leq 6; \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$D(y) = [2; 3]$$

Устные упражнения

3. Укажите область значений функции:

$$y = \frac{\pi}{3} - 2 \arccos x$$

Решение:

$$E(y): \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi; \quad -2\pi \leq -2 \arccos x \leq 0;$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi \leq \frac{\pi}{3} - 2 \arccos x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{5\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} - 2 \arccos x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$E(y) = \left[-\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$$

Устные упражнения

4. Найдите значение выражения:

$$\arcsin 0,3 + \arccos 0,3$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

Устные упражнения

5. Известно, что $\arcsin x = \frac{\pi}{8}$. Найдите $\arccos x$.

Решение:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

Устные упражнения

6. Известно, что $\sin(\arcsin x) = -\frac{1}{3}$. Найдите x .

Решение: Пусть $\arcsin x = \varphi$,
тогда $\sin \varphi = x$.

$$\text{Но } \sin \varphi = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Значит } x = -\frac{1}{3}$$

Устные упражнения

7. Известно, что $\arccos x = \frac{\pi}{5}$. Найдите $\arccos(-x)$.

Решение:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

Устные упражнения

8*. Вычислите $\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right)$

Решение:

$$\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right) = \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arcctg} \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} = 1,5$$

Проверка домашнего задания

Решим уравнение

$$\arcsin \left(x^2 - x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2-x} + \arccos \frac{4y}{\pi} + \operatorname{tg}^2(z + x - 1) \right) + \sqrt{2x^2 - x - 1} =$$
$$= \sqrt{x - x^2} + \operatorname{arctg}(2 - x)$$

Решение.

Методы решения уравнения нестандартные. Найти область допустимых значений уравнения трудно. Если уравнение имеет решение, то решениями являются тройки чисел (x_0, y_0, z_0) и, в частности, определены выражения:

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} \quad \text{и} \quad \sqrt{x - x^2},$$

т.е. справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

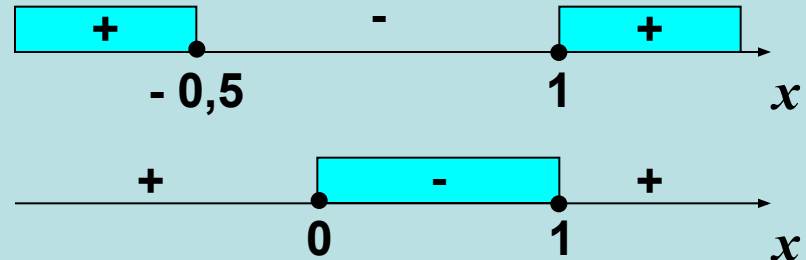
Проверка домашнего задания

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1)(x+0,5) \geq 0 \\ x(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

$x = 1$ - единственное решение системы.



Подставим $x = 1$ в исходное уравнение. Получим уравнение:

$$\arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos \frac{4y}{\pi} + \operatorname{tg}^2 z \right) = \operatorname{arctg} 1$$

$$\arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos \frac{4y}{\pi} + \operatorname{tg}^2 z \right) = \frac{\pi}{4}$$

Проверка домашнего задания

Т.к. $\arcsin a = \frac{\pi}{4}$ только для $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos \frac{4y}{\pi} + \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arccos \frac{4y}{\pi} + \operatorname{tg}^2 z = 0$$

Оценим каждое слагаемое левой части уравнения.

По определению арккосинуса $0 \leq \arccos \frac{4y}{\pi} \leq \pi$.

$\operatorname{tg}^2 z \geq 0$ при всех допустимых значениях z .

Значит, оба слагаемые неотрицательны. Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, если каждое из них равно нулю, т.е.

Проверка домашнего задания

$$\arccos \frac{4y}{\pi} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 z = 0$$

$$\frac{4y}{\pi} = \cos 0$$

$$\operatorname{tg} = 0$$

$$\frac{4y}{\pi} = 1$$

$$z = \pi n, n \in Z$$

$$y = \frac{\pi}{4}$$

Итак, если исходное уравнение имеет решение, то все они содержатся среди троек чисел

$$\left(1; \frac{\pi}{4}; \pi n \right), \quad n \in Z$$

Проверка домашнего задания

Проверка показывает, что каждая такая тройка удовлетворяет исходному уравнению, а значит, является решением этого уравнения.

$$\text{Ответ: } \left(1; \frac{\pi}{4}; \pi n \right), \quad n \in Z$$

Повторение

Уравнения, способ решения которых предполагает использование свойств аркфункций

Решить уравнение:

$$\operatorname{arccotg}(x^2 - 5x + 8) = -\frac{2}{3};$$

$$\arcsin(1 - x) = \arccos(1 + x);$$

$$3 \arcsin x + \pi x - \pi = 0.$$

Решение любого уравнения полезно начинать с анализа его области определения. Если эта область пуста или состоит из конечного числа элементов (и это число невелико), то вывод о множестве корней уравнения сделать нетрудно. Также иногда бывает целесообразно оценивать множества значений левой и правой частей уравнения.

Ни один из описанных приемов не дает возможности решить четвертое уравнение. Если записать это уравнение в виде

$$3 \arcsin x = \pi - \pi x,$$

то к полученному уравнению удобно применить один из общих приемов решения уравнений, в основе которого лежит утверждение: если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции и $f(x)$ — возрастающая, $g(x)$ — убывающая или постоянная, то их графики пересекаются не более чем в одной точке.

Имеем: $f(x) = 3 \arcsin x$ — возрастающая функция, $g(x) = \pi - \pi x$ — убывающая. Обе функции непрерывны. Значит, если уравнение имеет корень, то ровно один. Этот

корень $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ нетрудно найти.

Итак, при решении уравнений, содержащих аркфункции, используются общие приемы решения уравнений. Они связаны с установлением области определения уравнения, оценкой множеств значений выражений в левой и правой частях уравнения, исследованием функций на монотонность.

Работа в группах

Уравнения, содержащие аркфункции, разделяют на виды по способу их решения:

- уравнения, способ решения которых предполагает использование свойств аркфункций;
- простейшие уравнения;
- уравнения, сводящиеся к алгебраическим относительно аркфункции;
- уравнения, способ решения которых состоит в действии тригонометрической функции на обе части уравнения.

Работа в группах. Решить уравнения

1) $2 \arcsin \tilde{\delta} + \arccos \tilde{\delta} = 4$

2) $\arcsin (2\tilde{\delta}) + \operatorname{arctg} \frac{3x}{x^2 - 5x + 6} = \pi$

3) $\arccos (\tilde{\delta} - 2) = 2 \operatorname{arctg} (\tilde{\delta} - 1)$

4) $2 (\arcsin \tilde{\delta})^2 - \arcsin \tilde{\delta} = 6$

5) $\sin (\arcsin (4\tilde{\delta} - 1)) = 3x^2$

6) $2 \operatorname{arctg} (2\tilde{\delta} - 3) = \pi$

7) $\arccos (\tilde{\delta}^2 - x) = \arccos (2\tilde{\delta} - 2)$

8) $\hat{A} \hat{u} \div \hat{e} \hat{n} \hat{e} \hat{e} \hat{o} \hat{u} : \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) + \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$

Ответы к работе в группах

1. Корней нет
2. Корней нет
3. 2
4. $-\sin 1,5$
5. $1/3$
6. 1,5
7. 1
8. -7

Итоги урока

Результаты групповой работы:

I место – команда Григорьевой Владиславы

II место – команда Горяиновой Виктории

III место – команда Гридасова Виктора

Ребята получили поздравления и поощрительные призы с пожеланиями дальнейших успехов в учебе.