

*Свойства производной.  
Построение графиков  
функций.*

(Повторение материала 10 класса).

Построение графика функции, заданной формулой, начинают с её исследования

- 1) Находят область определения функции
- 2) Выясняют, является ли функция четной (или нечетной), является ли периодической
- 3) Находят точки пересечения функции с осями  $OX$  и  $OY$
- 4) Находят промежутки знакопостоянства функции
- 5) Находят промежутки возрастания и убывания
- 6) Точки экстремума и значения функции в этих точках
- 7) Исследуют поведение функции в «особых» точках и при больших  $x$  (проверяют на асимптоты)

Промежутки возрастания и убывания (промежутки монотонности).

Достаточный признак убывания :  
если  $f'(x) < 0$ , то  $f(x)$  убывает  
на данном промежутке.

Достаточный признак возрастания : если  
 $f'(x) > 0$ , то  $f(x)$  возрастает  
на данном промежутке.

*Пример.*

Для функции  $f(x) = x^4 - 8x^2$

*найти промежутки монотонности.*

1.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ , функция непрерывна и дифференцируема на области определения.

2.  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

3.  $f'(x) = 0$ , если  $4x^3 - 16x = 0$ ;

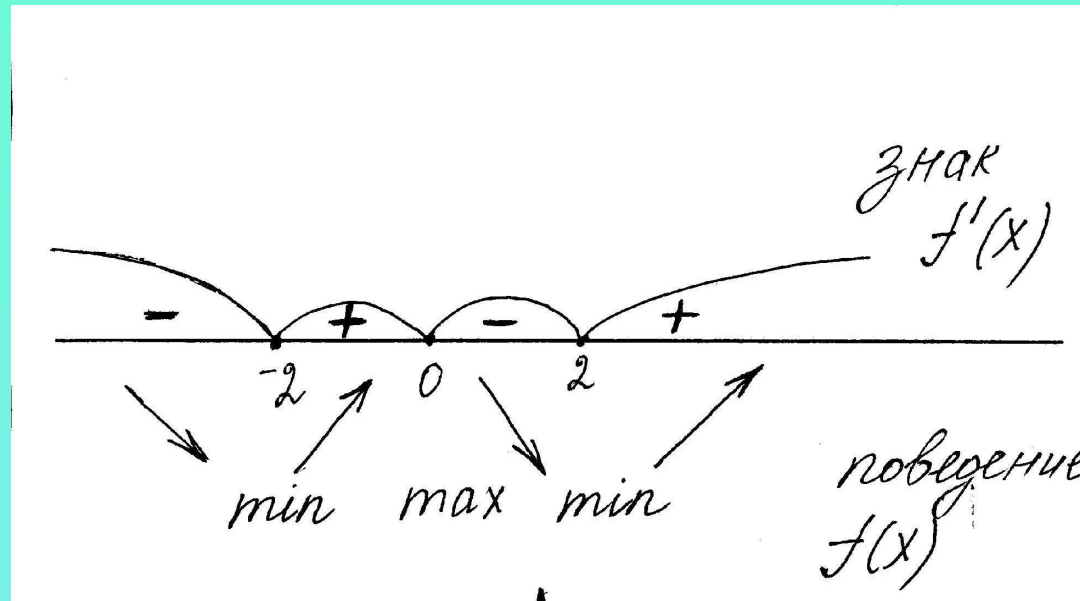
$$4x(x-2)(x+2) = 0;$$

$$x = -2; x = 2.$$

Решим неравенства

$$4x(x-2)(x+2) < 0 \text{ и } 4x(x-2)(x+2) > 0$$

методом интервалов.



Ответ: функция  
возрастает, если  $x \in [-2; 0], [2; +\infty)$ ;  
убывает, если  $x \in (-\infty; -2], [0; 2]$ .

## **Точки экстремума функции (точки максимума и точки минимума)**

*Точка  $a$  называется точкой максимума функции  $f(x)$ , если верно неравенство  $f(x) \leq f(a)$*

*Если при переходе через точку  $a$  производная меняет знак с «+» на «-»,*

*то эта точка является*

***точкой максимума***

## **Точки экстремума функции (точки максимума и точки минимума)**

*Точка  $a$  называется точкой минимума функции  $f(x)$ , если верно неравенство*

$$f(x) \geq f(a)$$

*Если при переходе через точку  $a$  производная меняет знак с «-» на «+»,*

*то эта точка является*

***точкой минимума***

Если производная сохраняет свой знак при переходе через точку  $a$ , то такая точка называется **точкой перегиба**

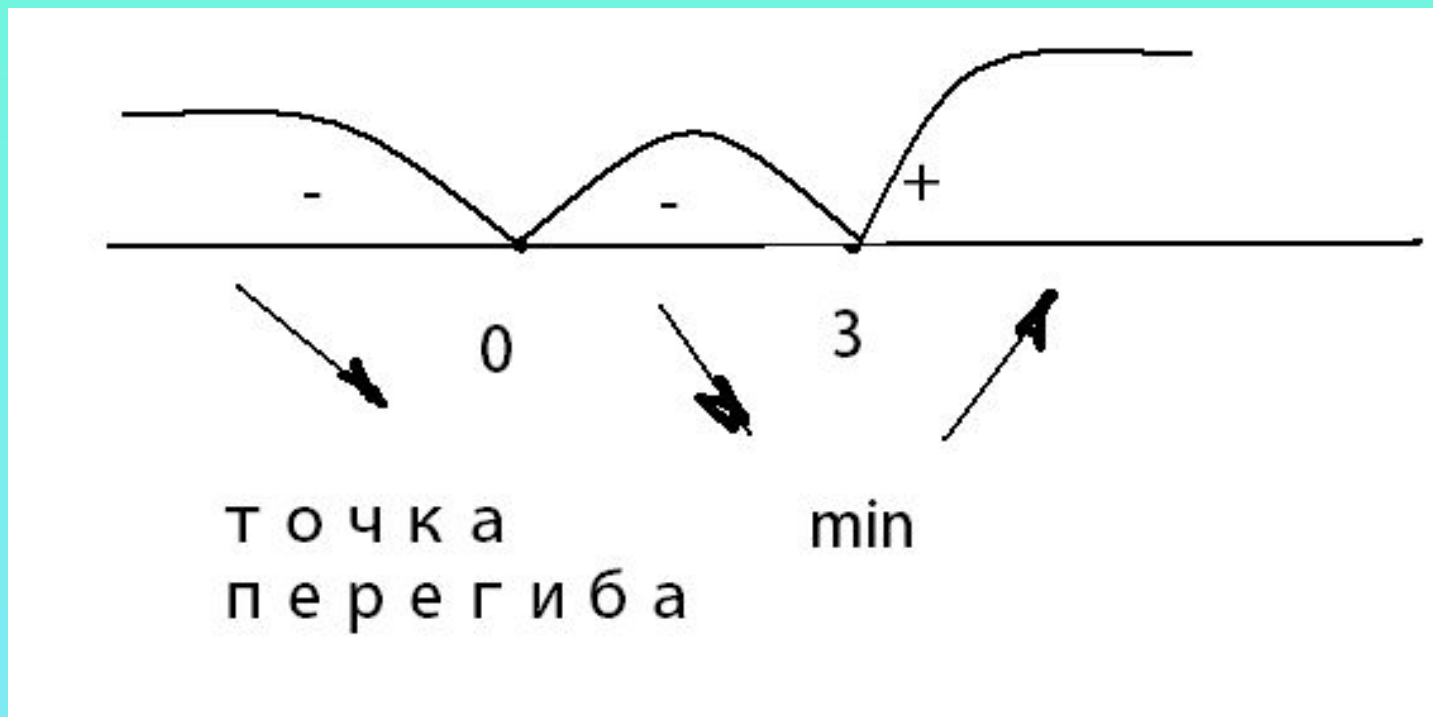


Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

Решение:  $f' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$ ;

$$x_1 = 0; x_2 = 3;$$



**При переходе через точку  $x = 0$  производная не меняет знак, эта точка не является точкой экстремума, это точка перегиба. При переходе через точку  $x = 3$  производная меняет знак с «-» на «+». Это точка минимума.**

**Если исследовать функцию и построить график, то это будет видно наглядно.**

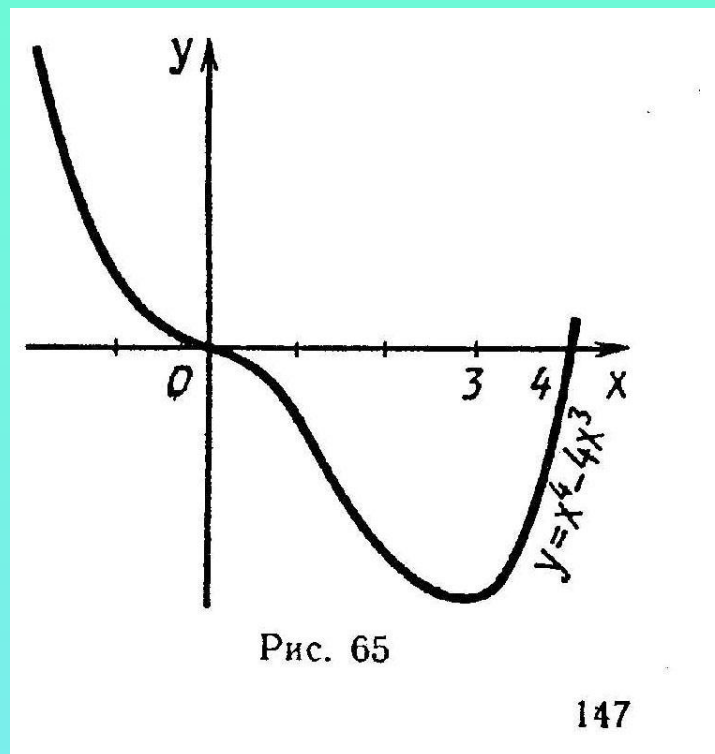
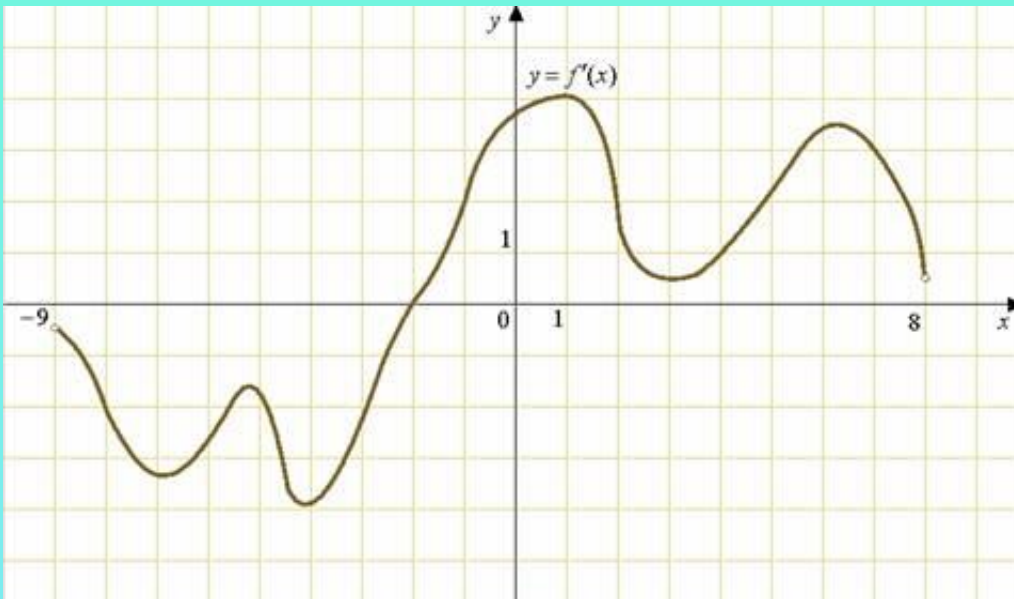


Рис. 65

*Ответ: Функция имеет одну точку экстремума, это точка минимума  $x = 3$*

# Производная на ЕГЭ (B8)

На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$  определенной на интервале  $(-9; 8)$ . В какой точке отрезка  $[-8; -4]$   $f(x)$  принимает наименьшее значение?



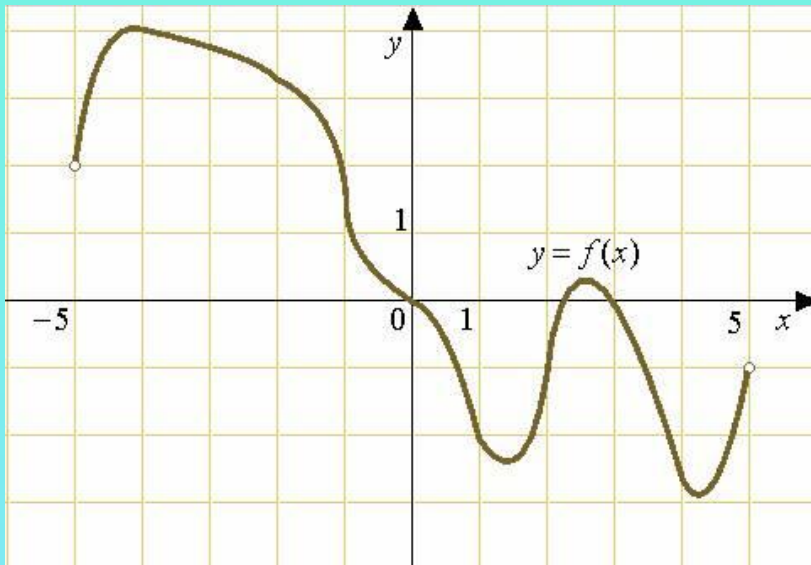
**Ответ:**  $-2$

# Производная на ЕГЭ (B8)

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ ,  
определенной на интервале  $(-5; 5)$

. Определите количество целых точек,

в которых производная функции  $f'(x)$  отрицательна.



Ответ: 8

# Производная на ЕГЭ (B14)

Найдите наименьшее значение  
функции  $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 24$   
на отрезке  $[-2; -0,5]$

**Решение.**  $y' = 3x^2 + 12x + 9$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0 \quad x = -3; x = -1$$

$$3(x+3)(x+1) < 0 \quad \text{и} \quad 3(x+3)(x+1) > 0$$

Знаки производной

$$y' < 0 \text{ на } [-3; -1] \quad \text{и} \quad y' > 0 \text{ на } (-\infty; -3], [-1; +\infty)$$

$$x = -1 \text{ точка минимума} \quad y_{\text{наим}} = y(-1) = 20$$

**Ответ: 20**

## **Использованные ресурсы:**

- *Открытый банк задач ЕГЭ по математике 2012*  
*<http://live.mephist.ru/show/mathege2010/>*
- *Обучающая система Д. Гущина «РЕШУ ЕГЭ»*  
*<http://reshuege.ru/>*
- Мордкович А.П. П.В. Алгебра и начала анализа (профильный уровень) 10 класс, М., «Мнемозина», 2006.
- Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11 класс, М., «Просвещение», 1999.

**Автор:  
Заикина Наталья  
Алексеевна, учитель  
математики,  
МОУ «СОШ № 5»  
г. Саратов**