

Математическое моделирование

Теория ошибок

Свойства случайных погрешностей

- ① количество ошибок со знаком плюс **почти равно** числу ошибок со знаком минус, причем это правило выполняется тем лучше, чем больше произведено измерений;
- ② крупные ошибки встречаются реже мелких;
- ③ величина наиболее крупных ошибок не превышает некоторой определенной величины, зависящей от точности измерений - **пределальной ошибки**;
- ④ для большой выборки измерений справедливо приближенное равенство $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \approx 0$

Вероятнейшие ошибки

Пусть имеется ряд равноточных измерений

$$a_1, a_2, \dots a_n.$$

Найдем среднеарифметическое

$$a = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}$$

и подсчитаем разности

$$v_1 = a - a_1, v_2 = a - a_2, \dots v_n = a - a_n$$

Сложим равенства почленно

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = na - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Так как правая часть равна нулю, то $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$

Вероятнейшие ошибки

Случайные (истинные) ошибки не обладают этим свойством!

Вероятнейшие ошибки составляют **основу** математической обработки результатов измерений, только по ним определяют предельную абсолютную ошибку Δa среднеарифметического a для оценки точности итогового результата измерений.

Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения

Если сумму квадратов всех случайных ошибок разделить на общее количество ошибок получим средний квадрат случайной ошибки.

Корень квадратный из этой величины называют *средней квадратичной ошибкой отдельного измерения*

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Средняя квадратичная ошибка отдельного измерения

В математической теории случайных ошибок [1] для большого количества измерений справедливо следующее равенство

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}}$$

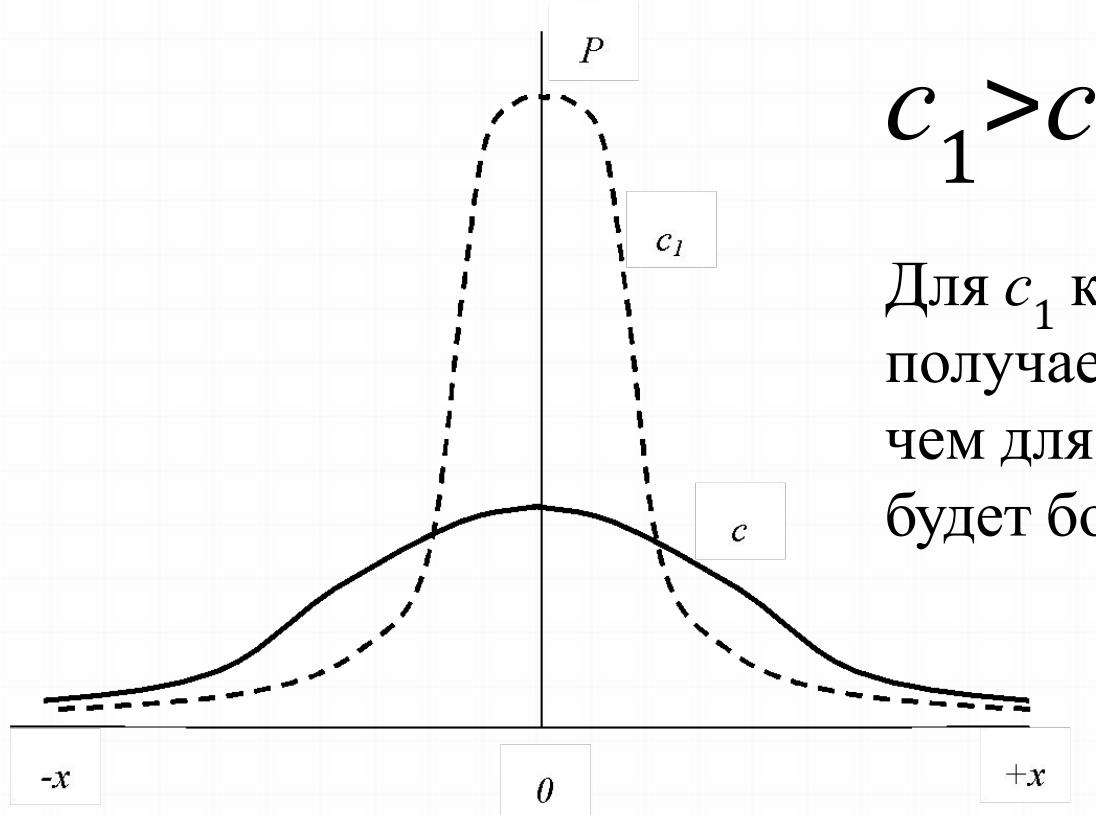
Таким образом, можно вычислить среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения S_n , не зная самих истинных ошибок

Кривая Гаусса

Свойства случайных ошибок показывают, что частота P появления случайной погрешности величиной x будет тем меньше, чем больше сама эта ошибка. Иначе, частота или вероятность появления случайных ошибок есть убывающая функция их величины $P = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2}$.

Здесь c – некоторая константа, называемая мерой точности измерений

Кривая Гаусса



$$c_1 > c$$

Для c_1 кривая получается более узкая, чем для c . Такой ряд будет более точный.

Кривая Гаусса

При большом числе наблюдений величина S_n стремится к постоянному значению

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Параметр σ (стандартная погрешность) определяет ширину распределения, связанную с мерой точности c соотношением

$$c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$$

Тогда формула Гаусса преобразуется к более распространенному виду

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \frac{1}{2\sigma^2}}$$

Средняя среднеквадратичная ошибка окончательного результата измерений

Поскольку истинную абсолютную ошибку x окончательного результата измерений найти невозможно, вычисляют оценку этой ошибки – среднеквадратичную ошибку среднеарифметического. Согласно теории случайных ошибок, ее можно определить по формуле

$$S = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{(n - 1)n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Таким образом повысить точность вычислений можно увеличением числа наблюдений, это фундаментальный закон теории ошибок.

Предельная случайная ошибка

Предельной случайной ошибкой $x_{\text{пр}}$ называют самую большую из всех случайных ошибок в данном ряду равноточных измерений.

Случайные ошибки распределяются по отношению к средней квадратичной ошибке отдельного измерения следующим образом:

- 0 68,3 % случайных ошибок меньше S_n ;
- 0 95,7 % этих ошибок меньше $2S_n$;
- 0 99,7 % – меньше $3S_n$.

Таким образом, принимают, что для всякого рода равноточных измерений предельная случайная ошибка с вероятностью, близкой к 100 %, равна $3S_n$

Предельная случайная ошибка

Предельная абсолютная ошибка эксперимента

$$\Delta a = 3 \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

Предельная абсолютная ошибка среднеарифметического не является достаточной характеристикой качества измерений, оно лучше характеризуется предельной относительной ошибкой

$$E = \frac{\Delta a}{a}$$

Здесь a – среднеарифметическое

Запись окончательного результата измерений будет иметь следующий вид

$$X = a \pm \Delta a$$

Доверительный интервал

Предыдущая запись справедлива при достаточно большом числе измерений.

В 1908 году Уильям Сили Госсет (псевдоним Стьюдент), применил статистический подход при определении ошибок для небольшого числа измерений (менее 30). При этом в случае $n \rightarrow \infty$, распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

Если существует величина α вероятности отличия результата измерений от истинного значения на величину не более, чем $\Delta a_{\text{сл}}$, она называется доверительной вероятностью, а интервал значений от $X - \Delta a_{\text{сл}}$ до $X + \Delta a_{\text{сл}}$ называется доверительным интервалом.

Доверительный интервал

Абсолютная ошибка при малом количестве измерений определяется при помощи специального коэффициента, зависящего от надежности P и числа измерений n (коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$).

Для небольшого числа измерений n при доверительной вероятности P , полуширина доверительного интервала определяется в виде

$$\Delta a_{\text{сл}} = t_{\alpha,n} S$$

Практическое занятие №1

Задание 2.

0 Найти среднюю квадратичную ошибку отдельного измерения S_n и среднюю среднеквадратичную ошибку S результатов 50-ти измерений маятника №1 по зависимостям

$$S_n = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{cp})^2}{(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - t_{cp})^2}{(50-1)}}$$

$$S = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{cp})^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} (t_i - t_{cp})^2}{50(50-1)}}$$

Практическое занятие №1

Задание 2.

О Определить абсолютную погрешность в определении периода колебаний

$$\Delta t = \pm 3S$$

и предельные случайные ошибки измерений

$$t_{min} = -3S_n; t_{max} = +3S_n.$$

Проверить 99,7% попадание всех измерений в этот промежуток.

Практическое занятие №1

Задание 2.

Определить доверительную погрешность
(полуширину доверительного интервала)

$$\Delta t_{\text{сл}} = t_{\alpha,n} S$$

для доверительной вероятности $P=0,95$.

Значение критерия Стьюденда $t_{\alpha,n}$ взять для $n=50$
($t_{0,95;50}=2,011$).

Сравнить полученное значение с абсолютной
погрешностью Δt .

Практическое занятие №1

Задание 2.

- 0 Повторить вычисления пунктов 1-3 для маятников №3, №4. Для маятника №2 взять среднеквадратичную ошибку S_n и значение $t_{a,n}$ из результатов для маятника №1, так как эксперимент проводится в одних и тех же условиях, одним и тем же экспериментатором.
- 0 Записать результаты измерений для всех маятников и сделать выводы. При этом учитывать число **верных знаков** в результатах измерений.

Список литературы

1. Колесников А.Ф. Основы математической обработки результатов измерений / А.Ф. Колесников. г. Томск, изд-во Томского университета, 1963. 49 с.