

# Таблицы

## Алгебра 8 класс

# Содержание

- Рациональные дроби и их свойства
- Сумма и разность дробей
- Произведение и частное дробей
- Функция  $y=k/x$  и ее график
- Действительные числа
- Арифметический квадратный корень
- Функция квадратного корня из  $x$  и его график
- Свойства арифметического квадратного корня
- Квадратное уравнение и его корни
- Формула корней квадратного уравнения
- Дробные рациональные уравнения
- Числовые неравенства и их свойства
- Неравенства с одной переменной и их системы
- Степень с целым показателем и ее свойства

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

## РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ:

**I. Целые выражения** имеют смысл при любых значениях переменных

Примеры:  $a^3 + b^2$ ;  $\frac{y}{2} + \frac{x+3}{5}$ ;  $y:5$

**II. Дробные выражения** имеют смысл при допустимых значениях переменных

Примеры:  $z + \frac{7}{x+y}$ ;  $\frac{c}{a^2 - b^2}$ ;  $n:m$

**РАЦИОНАЛЬНАЯ ДРОБЬ** – частный вид рационального выражения, дробь, числитель и знаменатель которой – многочлены.

**Основное свойство дроби**

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$  Верно для любых  $a, b$  и  $c$ ,  
где  $b \neq 0, c \neq 0$

**Правило об изменении знака перед дробью**

$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$ , где  $b \neq 0$



# СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0$$

Разность дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0$$

Сложение дробей с разными знаменателями

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$$

Вычитание дробей с разными знаменателями

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$$



# ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ

Произведение  
дробей

Возведение  
дроби в степень

при  $b \neq 0, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Деление дробей

при  $b \neq 0, c \neq 0$  и  $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Рациональное выражение можно  
представить в виде рациональной дроби

Пример: при  $a \neq b, a \neq 0$  и  $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2} &= \frac{\frac{a}{b} ab - \frac{b}{a} ab}{\frac{a}{b} ab + \frac{b}{a} ab - 2ab} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - 2ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b} \end{aligned}$$

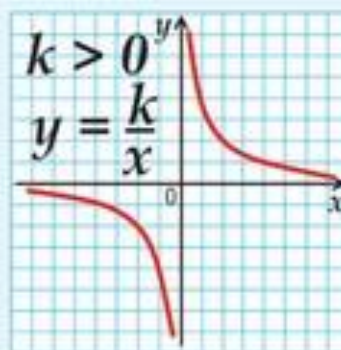
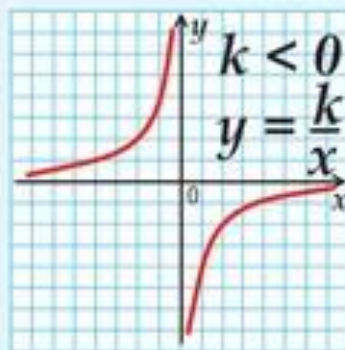
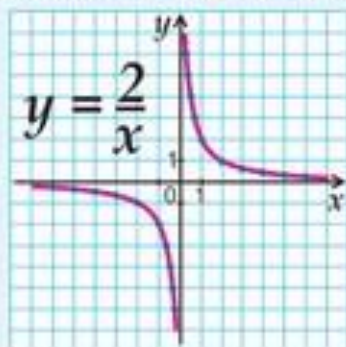


# ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

Функция вида  $y = \frac{k}{x}$ , где  $x$  – независимая переменная и  $k$  – неравное нулю число, называется обратной пропорциональностью.

График такой функции - гипербола.

Гипербола состоит из двух ветвей ( $x \neq 0$ )



# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА



# АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Число, квадрат которого равен  $a$ , называют **КВАДРАТНЫМ КОРЕНЕМ** из числа  $a$

Неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ , называют **АРИФМЕТИЧЕСКИМ КВАДРАТНЫМ КОРЕНЕМ** из числа  $a$

Если  $b \geq 0$  и  $b^2 = a$ , то  $\sqrt{a} = b$

Если  $a < 0$ , то выражение  $\sqrt{a}$  не имеет смысла

Если  $\sqrt{a}$  имеет смысл, то  $(\sqrt{a})^2 = a$

Уравнение  $x^2 = a$

1)  $a < 0$ , значит,  $x^2 = a$  не имеет корней

2)  $a = 0$ , значит,  $x^2 = a$  имеет единственный корень - нуль

3)  $a > 0$ , значит,  $x^2 = a$  имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{a} \text{ и } x_2 = \sqrt{a}$$





# ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

- 1) График находится в первой координатной четверти  
при  $x > 0, y > 0$
- 2) График функции проходит через начало координат  
при  $x = 0, y = 0$
- 3) График функции идет вверх  
при  $x_1 > x_2, y(x_1) > y(x_2)$

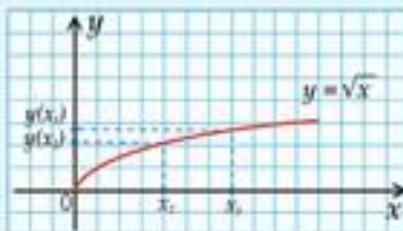
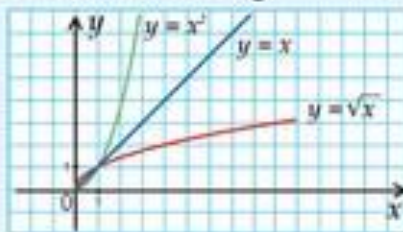


График функции  $y = \sqrt{x}$  симметричен графику функции  $y = x^2$  (при  $x \geq 0$ ) относительно прямой  $y = x$



# СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

## Свойство 1

Корень из произведения, где множители не отрицательны, равен произведению корней из этих множителей

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ если } a \geq 0, b \geq 0$$

Пример:  $\sqrt{64 \cdot 169} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{169} = 8 \cdot 13 = 104$

## Свойство 2

Корень из дроби, где знаменатель положителен, а числитель неотрицателен, равен отношению корня из числителя к корню из знаменателя

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ если } a \geq 0, b > 0$$

Пример:  $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$

## Квадратный корень из степени

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ верно для любого } a$$

Пример:  $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$



# КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  
где  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$  – некоторые числа,  
а  $x$  – переменная, называется  
**КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЕМ.**

Если  $b$  и/или  $c$  равно нулю, то уравнение  
 $ax^2 + bx + c = 0$  называется  
**неполным квадратным уравнением.**

Три вида  
неполных квадратных уравнений:

1)  $ax^2 = 0$   
 $x_1 = x_2 = 0$

2)  $ax^2 + bx = 0, b \neq 0$   
 $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{b}{a}$

3)  $ax^2 + c = 0, c \neq 0$   
при  $-\frac{c}{a} > 0$  уравнение имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

при  $-\frac{c}{a} < 0$  корней нет



# ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Дискриминант квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac$$

1) Если  $D < 0$ , то нет корней

2) Если  $D = 0$ , то  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3) Если  $D > 0$ , то  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

$x^2 + px + q = 0$  – приведенное  
квадратное уравнение.

**Теорема Виета.** Если  $x^2 + px + q = 0$ , то:  
 $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$



# ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ –

уравнения, левая и правая части которых являются **рациональными выражениями**

$$3x + 8 = 4(9 - x); 2x + \frac{3}{x} = -7x + 21; \frac{x - 11}{5x - 3} = \frac{x + 13}{x}$$

### Целые уравнения

$$7x + 14 = 5(11 - x);$$

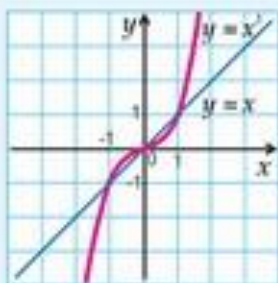
$$7(15 + 4x) = 6(x + 2)$$

### Дробные рациональные уравнения

$$\frac{x + 19}{x - 13} = \frac{17 + 2x}{4 - x}$$

Решение дробных рациональных уравнений:

- 1) Определить общий знаменатель всех дробей, входящих в уравнение
- 2) Вычислить произведение каждой части уравнения на общий знаменатель
- 3) Решить полученное целое уравнение
- 4) Исключить из найденных корней те, которые обращают общий знаменатель в нуль.



Графический способ решения уравнения:

Решите уравнение  $x^3 = x$

Значит,  $x^3 = x$  при

$$x_1 = -1, x_2 = 0,$$

$$x_3 = 1$$



# ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Если  $a - b$  – положительное число, то число  $a$  **больше** числа  $b$ , а если разность  $a - b$  – отрицательное число, то число  $a$  **меньше** числа  $b$



**Свойство 1.** Пусть  $a > b$ , значит,  $b < a$

Пусть  $a < b$ , значит,  $b > a$

**Свойство 2.** Пусть  $a < b$  и  $b < c$ , значит,  $a < c$

**Свойство 3.** Пусть  $c$  – любое число и  $a < b$ ,  
значит,  $a + c < b + c$

**Свойство 4.** Пусть  $c$  – положительное число и  $a < b$ ,  
значит,  $ac < bc$

Пусть  $c$  – отрицательное число и  $a < b$ ,  
значит,  $ac > bc$

**Свойство 5.** Пусть  $a$  и  $b$  – положительные числа и  $a < b$ ,  
значит,  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

**Свойство 6.** Пусть  $a < b$  и  $c < d$ , значит,  $a + c < b + d$

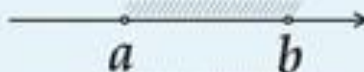
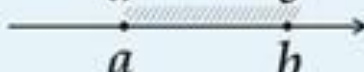
**Свойство 7.** Пусть  $a < b$  и  $c < d$ ,  $a, b, c$  и  $d$  –  
положительные числа, значит,  $ac < bd$

**Свойство 8.** Пусть  $a < b$ ,  $a$  и  $b$  – положительные числа,  
 $n$  – натуральное число, значит,  $a^n < b^n$



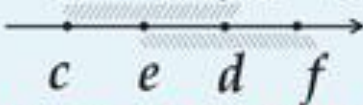
# НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

**Числовым промежутком** от  $a$  до  $b$  называют множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих условию  $a < x < b$

Обозначение:  $(a; b)$    
 $[a; b]$  

**Пересечением** числовых промежутков называют промежуток, составляющий общую часть этих промежутков

$$[c; d] \cap [e; f] = [e; d]$$



**Объединением** числовых промежутков называют промежуток, состоящий из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих промежутков

$$[c; d] \cup [e; f] = [c; f]$$

**Решение неравенства с одной переменной** – значение переменной, обращающее его в верное числовое неравенство.

**Решение системы неравенств с одной переменной** – значение переменной, обращающее каждое из неравенств системы в верное числовое неравенство.

**Решить систему неравенств** – значит найти все ее решения, либо доказать, что решений не существует.



# СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

Если  $a \neq 0$  и  $n$  – отрицательное

целое число, то:  $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

**Свойство 1.** Если  $a \neq 0$ , а  $m$  и  $n$  – целые, то  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$13^{-12} \cdot 13^{37} = 13^{-12+37} = 13^{25}$$

**Свойство 2.** Если  $a \neq 0$ , а  $m$  и  $n$  – целые, то  $a^m : a^n = a^{m-n}$

$$11^{18} : 11^{11} = 11^{18-11} = 11^7$$

**Свойство 3.** Если  $a \neq 0$ , а  $m$  и  $n$  – целые, то  $(a^m)^n = a^{mn}$

$$(23^3)^2 = 23^{3 \cdot 2} = 23^6$$

**Свойство 4.** Если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , а  $n$  – целое, то  $(ab)^n = a^n b^n$

$$(12)^2 = (3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$$

**Свойство 5.** Если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , а  $n$  – целое, то  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

**Стандартный вид** числа  $b$  – его запись в виде  $a \cdot 10^n$ , где  $n$  – целое число,  $1 \leq a < 10$ . Число  $n$  – порядок числа  $b$

