Перестаньте отыскивать интересные числа!
Оставьте для интереса хотя бы
одно неинтересное число!

Из письма читателя Мартину Гарднеру

Таинственная история СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ

$$2^{n-1} \cdot \left(2^{n} - 1\right)$$

Что такое совершенное число?

Среди всех интересных натуральных чисел, издавна изучаемых математиками, особое место занимают совершенные и близко связанные с ними дружественные числа.

Совершенным называется число, равное сумме всех своих делителей (включая 1, но исключая само число).

Никомах Геразский, славный грек, знаменитый философ и математик, писал: «Совершенные числа красивы. Красивые вещи редки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными бывают все числа, в то время как совершенных чисел немного».

Пифагорейцы развивали свою философию из науки о числах. Совершенные числа, считали они есть прекрасные образы добродетелей. Они представляют собой середину между излишеством и недостатком. Они очень редки и порождаются совершенным порядком. В противоположность этому сверхизобильные и несовершенные числа, которых сколь угодно много, не расположены в порядке и не порождаются с некоторой определенной целью. И поэтому они имеют большое сходство с пороками, которые многочисленны, неупорядочены и неопределены.

Из-за трудности нахождения и таинственной непостижимости совершенные числа в старину считались божественными. Так, средневековая церковь полагала, что изучение совершенных чисел ведет к спасению души, что нашедшему новое совершенное число гарантировано вечное блаженство. Существовало также убеждение, что мир потому прекрасен, что сотворен создателем за 6 дней. А вот род человеческий, дескать, несовершенен, ибо произошел от несовершенного числа 8. Ведь именно 8 людей спаслось от всемирного потопа в Ноевом ковчеге. Надо бы возразить, что в том же ковчеге спаслись еще семь пар чистых и семь пар нечистых животных, что в сумме составляет совершенное число 28. Да и вообще легко обнаружить множество подобных совпадений. Например, руки человеческие можно объявить совершенным орудием по той причине, что в десяти пальцах насчитывается 28 фаланг…

Сколько же их?

Первым совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число 6. Следующим совершенным числом, известным древним, было число 28. В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала были расположены 28 келий. До последнего времени именно столько членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах. Древних математиков удивляло особое свойство этих двух чисел: каждое из них равно сумме всех их собственных делителей:

6 = 1 + 2 + 3,

28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

До Евклида (знаменитый древнегреческий математик III в. до н. э.) были известны только эти два числа, и никто не знал, существуют ли еще совершенные числа и сколько их вообще может быть. Великий основатель геометрии много занимался изучением свойств чисел; конечно, его не могли не интересовать совершенные числа. Евклид доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей 2^(p -1) и (2^p) - 1, где второе - простое число, является совершенным числом. Если в формулу Евклида подставить p=2, то получим 2 x 3 = 6 - первое совершенное число, а если p=3, то 2^(3-1) x (2^3)-1 = 28. Благодаря своей формуле Евклид сумел найти еще два совершенных числа: третье при p=5 и четвертое при p=7. Вот эти числа: 496 и 8128.

Алгоритм построения чётных совершенных чисел описан в IX книге Начал Евклида. Эйлер впоследствии доказал, что все чётные совершенные числа имеют указанный вид.

Дальнейшие поиски оказались более сложными.

Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg).
(Geb. 6. Juni 1436, gest. 6. Juli 1476.)

Следующее, пятое совершенное число было найдено лишь полторы тысячи лет спустя в пятнадцатом веке немецким математиком Региомонтаном , оказалось, что и оно подчиняется условию Евклида и равно 33 550 336.

В XVI веке немецкий ученый Шейбель нашел еще два совершенных числа: 8589869056 и 137438691328. Они соответствуют

$p = 17$ и $p = 19$.

Однако на этот счет есть еще информация.

Катальди Пьетро Антонио (1548-1626), бывший профессором математики во Флоренции и Болонье, который первый дал способ извлечения квадратных корней, тоже занимался поисками совершенных чисел. В его записках были указаны значения шестого и седьмого совершенных чисел.

8 589 869 056 (шестое число),
137 438 691 328 (седьмое число).

И навсегда осталась в истории загадочная тайна, как он сумел найти их.

До сих пор предложено только одно объяснение этой загадке - оно было дано еще его современниками: помощь божественного провидения, подсказавшего своему избраннику верные значения двух совершенных чисел.

Однако …

Французский математик XVII века Марен Мерсенн предсказал, что многие числа, описываемые формулой «два в степени p минус один», где p - простое число, также являются простыми. Ему удалось доказать, что p=17, p=19, p=31:

P17=8589869056,
P19=137438691328,
P31=2305843008139952128.
являются совершенными.

Уже позднее было обнаружено, что почти за сто лет до Мерсенна числа p=17, p=19 нашел итальянский математик Катальди.

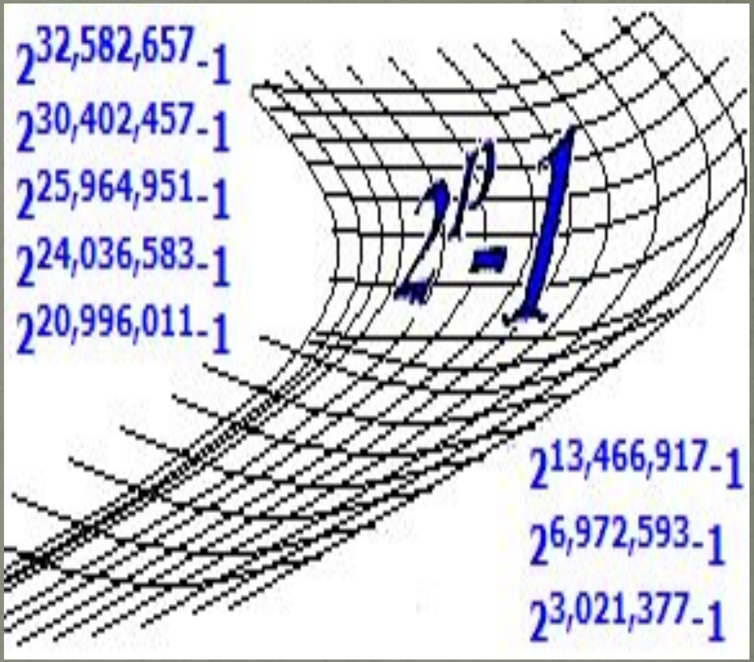
Девятое совершенное число было вычислено только в 1883 году. В нем оказалось тридцать семь знаков. Этот вычислительный подвиг совершил сельский священник из-под Перми **Иван Михеевич Первушин.** Первушин считал без всяких вычислительных приборов.

В начале XX в. были найдены еще 3 совершенных числа (для p = 89, 107 и 127).

До середины XX века обнаружено еще семь таких чисел. С 1952 года в поиски включились электронно-вычислительные машины. И если первое совершенное число (6) однозначно, то двадцать четвертое содержит уже свыше 12 000 знаков.

В 1971 г. за 40 минут работы мощная ЭВМ нашла наибольшее на тот период времени простое число вида $2^p - 1$: $2^{19937} - 1$, которому отвечало 24-е совершенное число: $2^{19936}(2^{19937} - 1)$.
В 1978 г. ЭВМ уже работала 440 часов, чтобы дойти к следующему простому числу : $2^{21701} - 1$. Ему отвечает 25-е совершенное число: $2^{21700}(2^{21701} - 1)$.
В 1980 г. с помощью ЭВМ удалось вычислить 27-е простое число $2^{44497} - 1$. Ему отвечает 27-е совершенное число

$$2^{44496} * (2^{44497} - 1)$$.



Хочется добавить…

Эти числа скрывают и сегодня много загадок. Неизвестно, ограничено или бесконечно их множество. Все открытые совершенные числа парные. Ученые доказали, что может быть не меньше 1036 непарных совершенных чисел, но ни одного из них ещё не нашли. Считают, что даже наименьшее из непарных совершенных чисел может быть чрезвычайно большим. Возникают и другие вопросы, ответа на которые ищет много математиков.

На октябрь 2008 г. известно 46 чётных совершенных числа, поиском новых таких чисел занимается проект распределённых вычислений GIMPS.

Почти все последующие совершенные числа выдерживают только евклидову форму записи.

Хочется добавить…

Все чётные совершенные числа (кроме 6) заканчиваются в десятичной записи на 16, 28, 36, 56, 76 или 96.

Все чётные совершенные числа (кроме 6) являются суммой кубов последовательных нечётных натуральных чисел: ($1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots$).

Все чётные совершенные числа являются треугольными числами; кроме того, они являются шестиугольными числами, то есть могут быть представлены в виде n(2n−1).

Сумма всех чисел, обратных делителям совершенного числа (включая его самого), равна 2. Например, для совершенного числа 28:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

Нечётных совершенных чисел до сих пор не обнаружено, однако не доказано и то, что их не существует. Неизвестно также, бесконечно ли множество всех совершенных чисел.

Доказано, что нечётное совершенное число, если оно существует, имеет не менее 9 различных простых делителей и не менее 75 простых делителей с учетом кратности.

Поиском нечётных совершенных чисел занимается проект распределённых вычислений OddPerfect.org.

Это интересно…

Определенный интерес для любителей представляет программа поиска совершенных чисел. Ее схема проста: в цикле для каждого числа проверять сумму его делителей и сравнивать ее с самим числом, - если они равны, то это число совершенное.

```
VAR I, N, Summa: LONGINT ;
           Delitel: INTEGER;
begin FOR I:=3 TO 34000000 DO BEGIN Summa:=1;
  FOR Delitel:=2 TO SQRT(I)   DO BEGIN N:=(I DIV Delitel);
   IF N*Delitel=I THEN Summa:=Summa + Delitel + (I DIV Delitel);
   END;
  IF INT(SQRT(I))=SQRT(I) THEN Summa:=Summa-INT(SQRT(I));
  IF I=Summa THEN WRITELN(I,’ - ‘,Summa) ;
   END ;
END.
```

Обратите внимание, что количество проверяемых делителей каждого числа растет до квадратного корня из числа. Подумайте о том, почему это так. И о том, что истинная красота - это нечто, в хозяйстве совершенно бесполезное, но бесконечно дорогое для настоящих ценителей.

В ходе работы были использованы материалы с сайтов:

- http://hypatia.magomir.ru
- http://in1.com.ua/article/21627/
- http://magazines.russ.ru
- http://rus.newsru.ua
- http://ru.wikipedia.org
- http://vse-znayka.ru
- http://www.alexandria.org.ua
- http://www.arbuz.uz