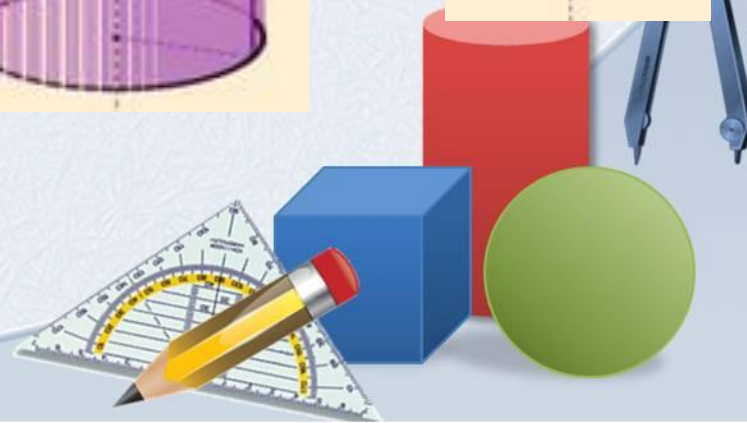
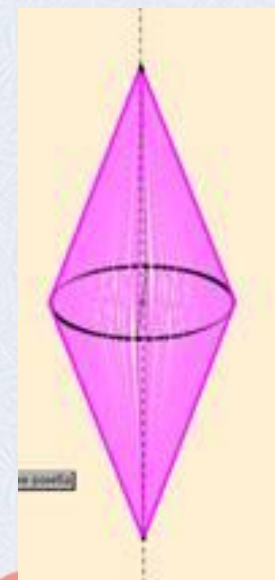
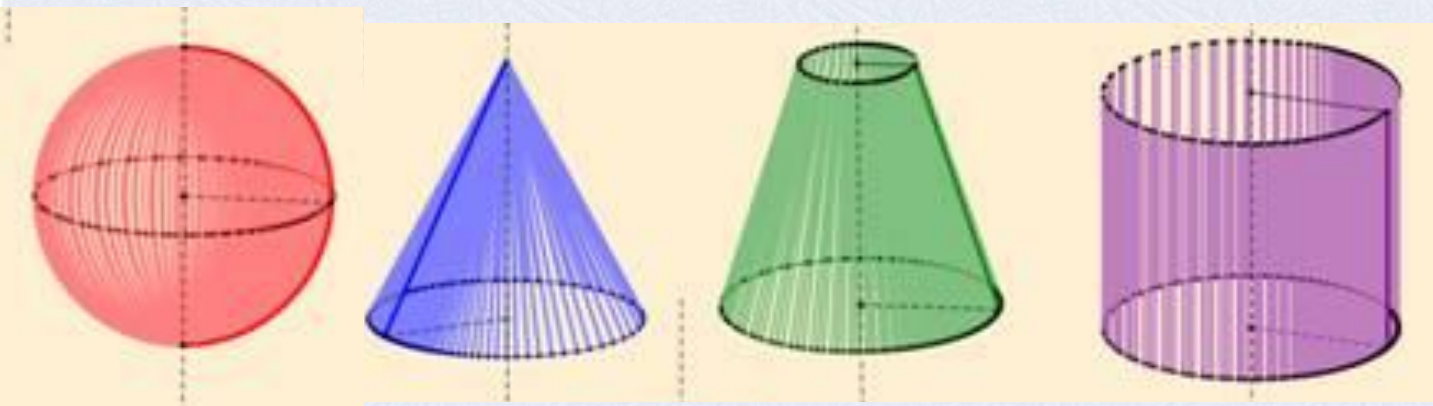
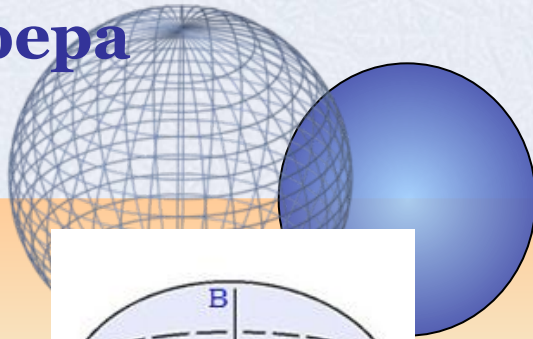


Тела вращения

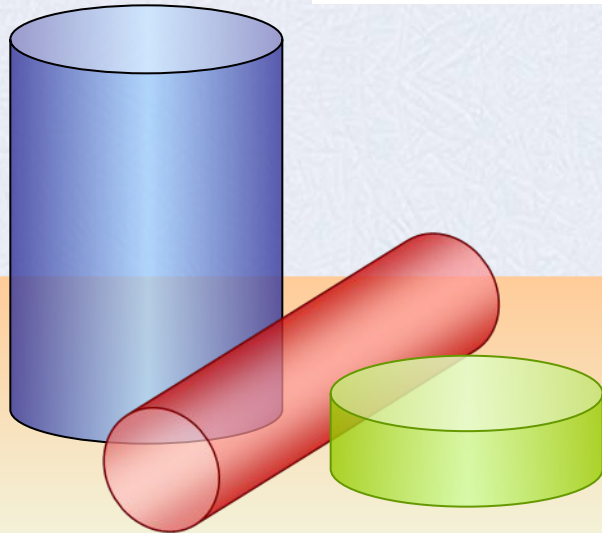
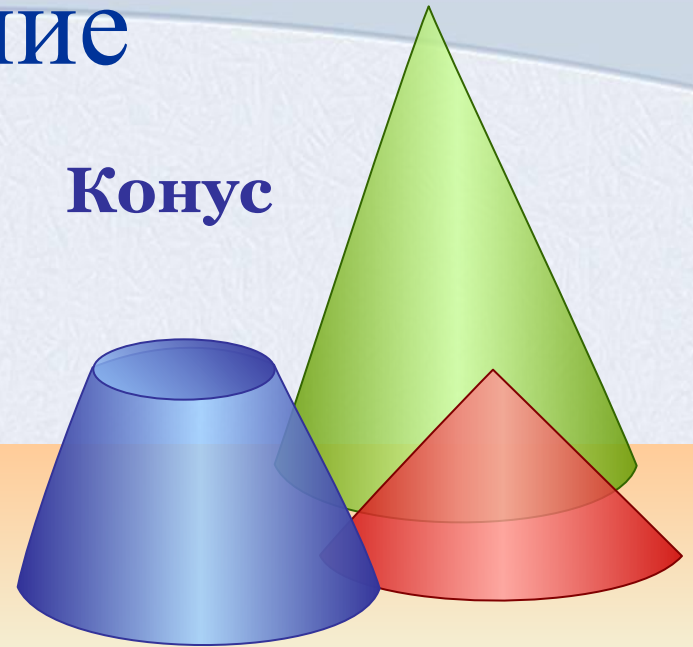


Содержание

Шар и
сфера

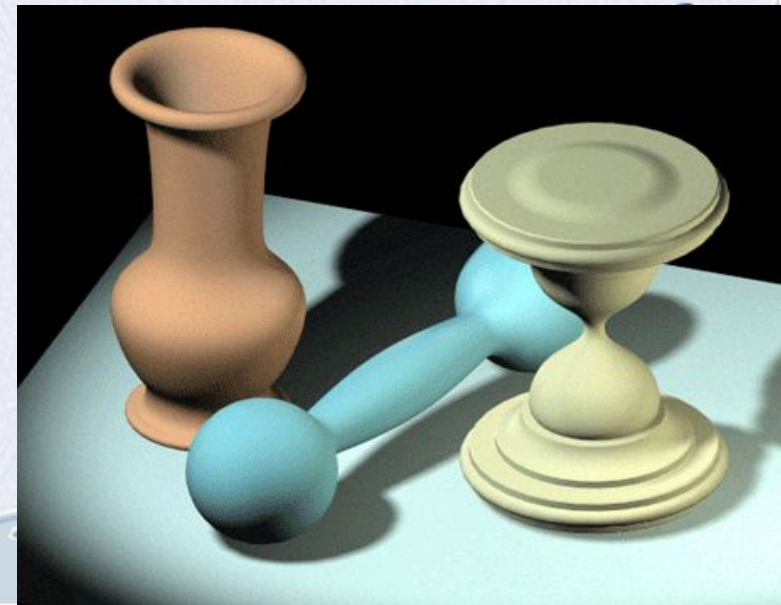


Конус



Цилиндр

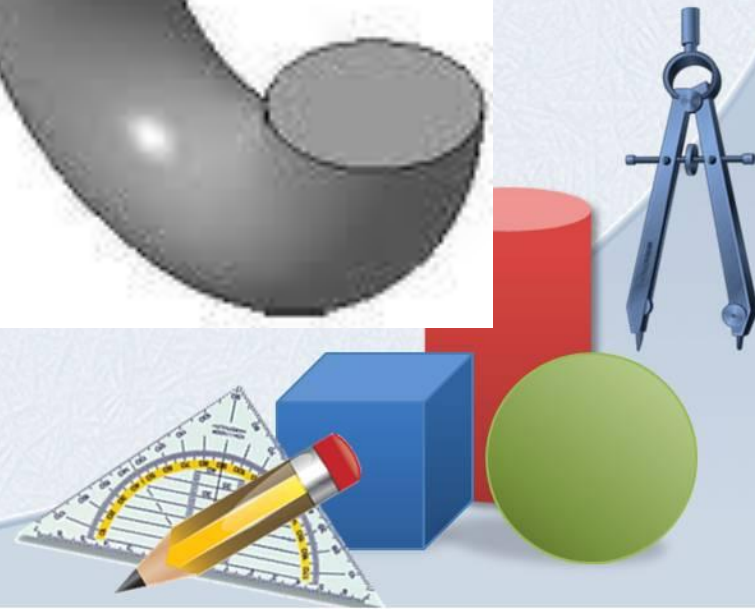
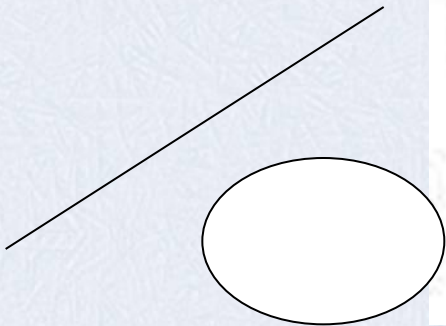
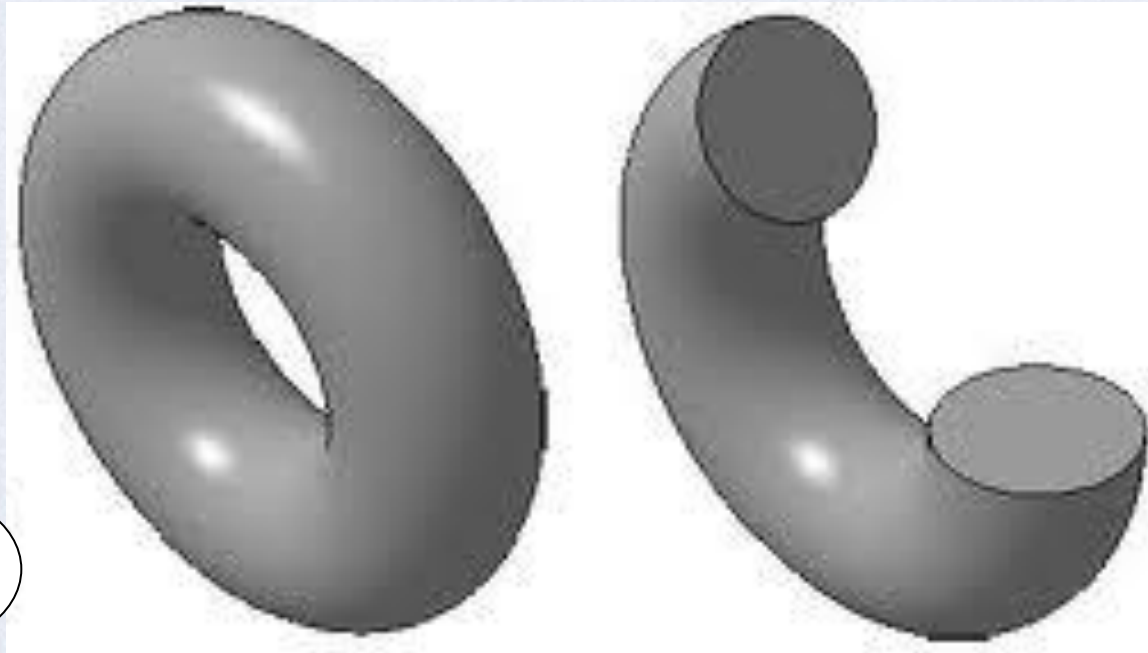
Тела



Левый клик по названию раздела

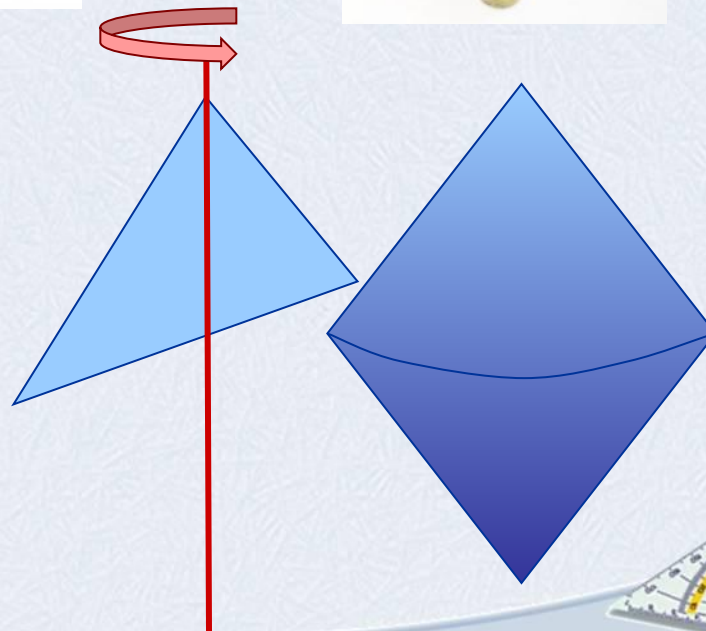
Определение тела вращения

Тело вращения – это пространственная фигура, полученная вращением плоской ограниченной области вместе со своей границей вокруг оси, лежащей в той же плоскости.



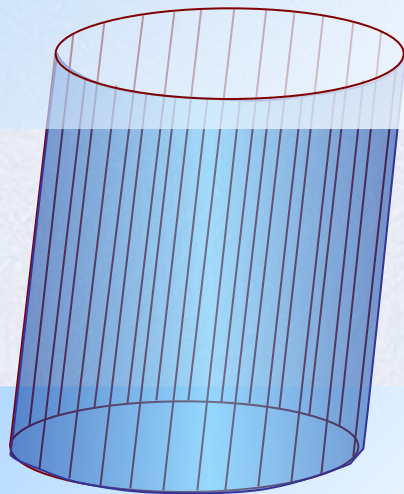
Задание

1) Приведите примеры из окружающего мира тел, похожих на тело полученное вращением треугольника вокруг оси, со стороны



Цилиндр

Зададим две параллельные плоскости α и β . В плоскости α расположим окружность некоторого радиуса. Если из каждой точки окружности провести взаимно параллельные прямые пресекающие плоскость β , то в плоскости β получится окружность такого же радиуса. Отрезки прямых, заключенных между параллельными плоскостями образуют в этом случае *цилиндрическую поверхность*.



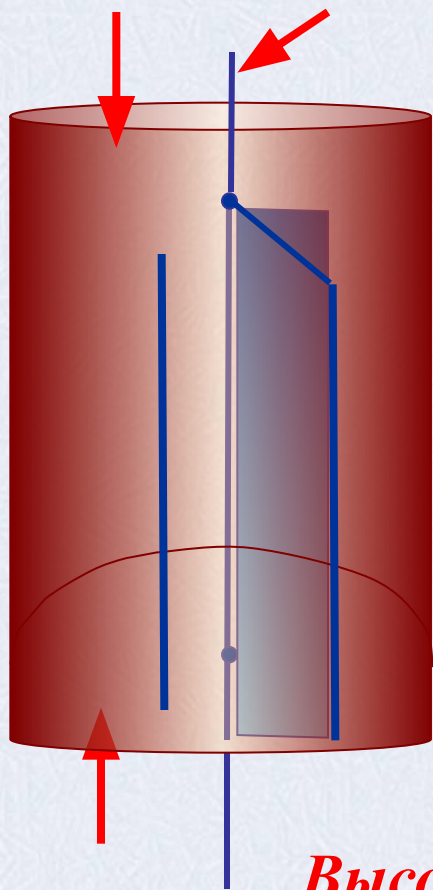
β

Цилиндр – это тело, заключенное между двумя кругами расположенными в параллельных плоскостях и цилиндрической поверхностью.

α



Цилиндр



Цилиндр – это тело, которое описывает прямоугольник при вращении около оси, содержащей его сторону.

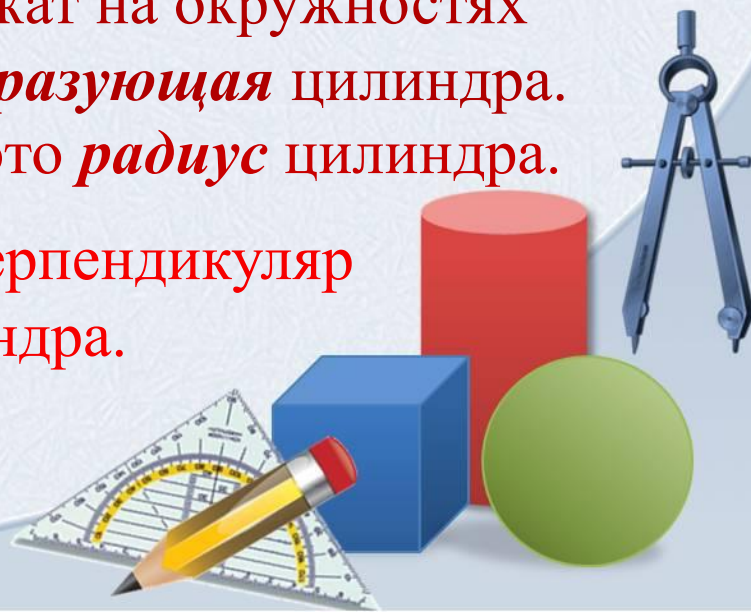
Верхний и нижний круги – это *основания* цилиндра.

Прямая проходящая через центры кругов – это *ось* цилиндра.

Отрезок параллельный оси цилиндра, концы которого лежат на окружностях основания – это *образующая* цилиндра.

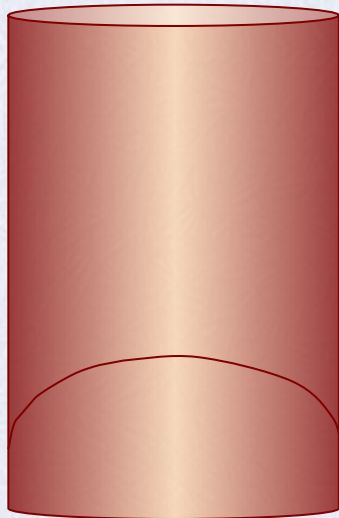
Радиус основания - это *радиус* цилиндра.

Высота цилиндра - это перпендикуляр между основаниями цилиндра.

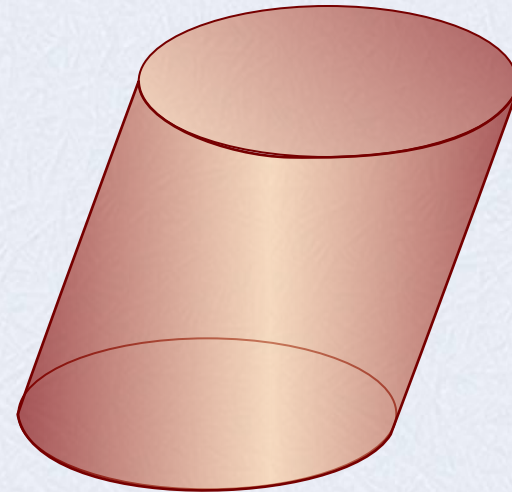


Виды цилиндров

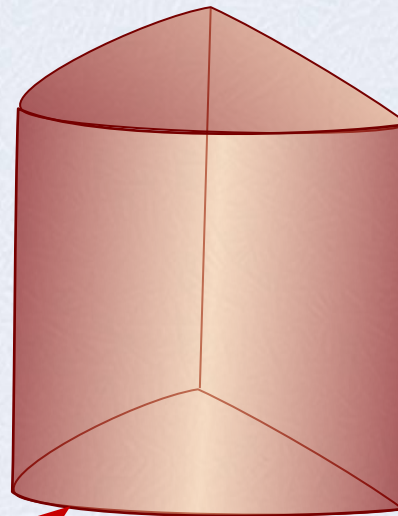
Прямой круговой



Наклонный круговой



Прямой некруговой



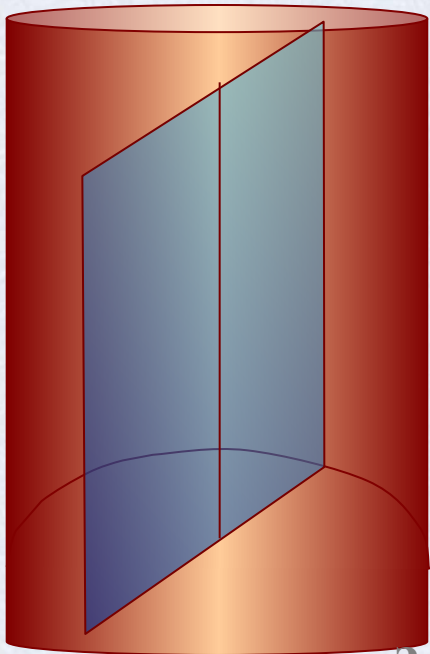
парабола

Замечание: В школьном курсе геометрии по умолчанию рассматривается прямой круговой цилиндр



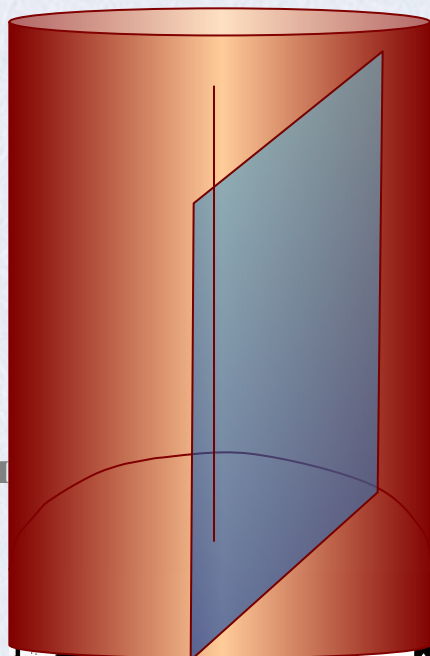
Сечения цилиндра

Осевое сечение: Плоскость сечения содержит ось цилиндра и перпендикулярна основаниям. В сечении – *прямоугольник.*



Сечение плоскостью параллельной оси цилиндра

Плоскость сечения параллельна оси цилиндра и перпендикулярна основаниям. В сечении – *прямоугольник.*

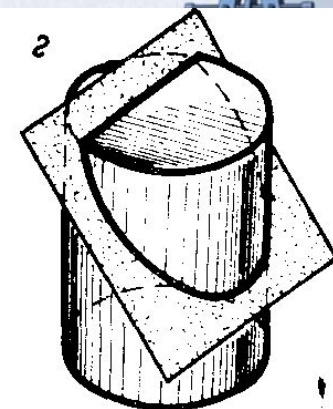
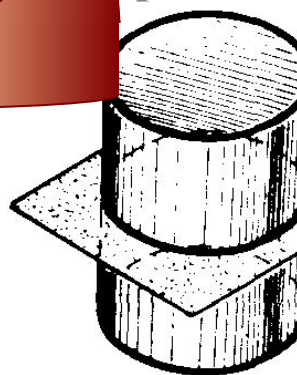


Сечение плоскостью параллельной основанию цилиндра

Плоскость сечения параллельна основаниям цилиндра и перпендикулярна оси. В сечении – *круг.*

Зам

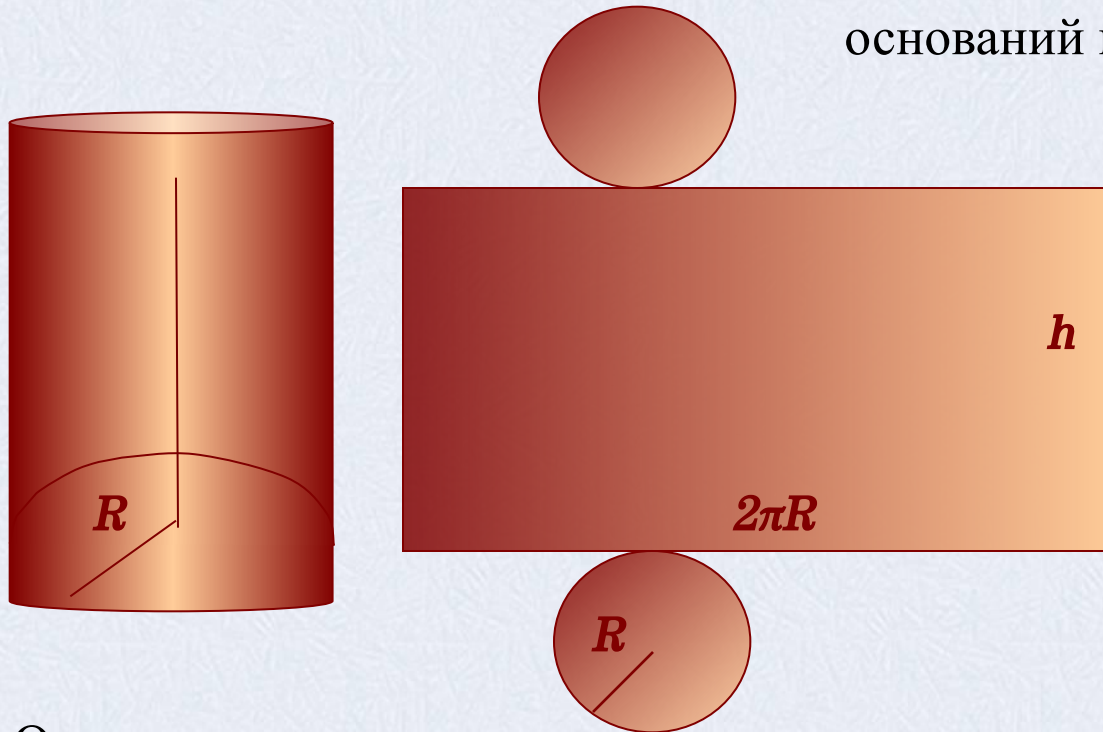
Плоскость может располагаться по-
другому, например некоторые виды сечений



Площадь поверхности цилиндра

Для вывода формулы площади полной поверхности цилиндра потребуется развертка цилиндра.

Полная поверхность состоит из 2 оснований и боковой поверхности.



Площадь основания находим как площадь круга $S = \pi R^2$

R – радиус основания цилиндра

Боковая поверхность цилиндра есть *прямоугольник*.

Одна сторона прямоугольника – это высота цилиндра (h), другая – длина окружности основания ($2\pi R$). Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению сторон прямоугольника.

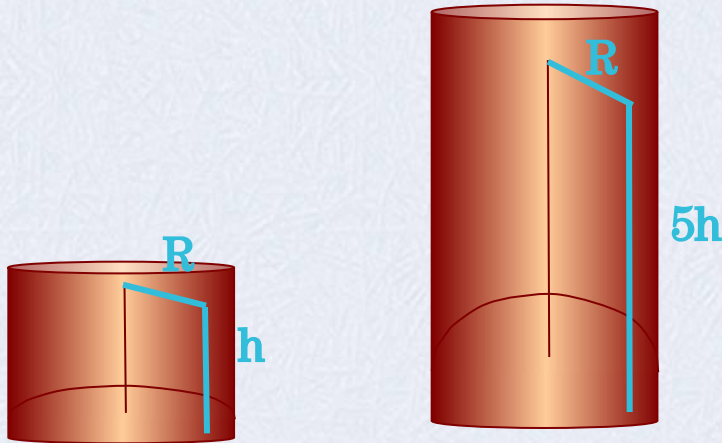
Получаем, $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R h + 2\pi R^2$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + h)$$



Решение устных задач с цилиндром

1) Во сколько раз увеличится боковая поверхность цилиндра, если его высота увеличится в 5 раз, а радиус основания останется прежним?



$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R 5h = 10\pi R h$$

Ответ: площадь боковой поверхности увеличится в 5 раз.

2) Как изменится площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания увеличится в 2 раза, а высота останется прежней?



$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h$$

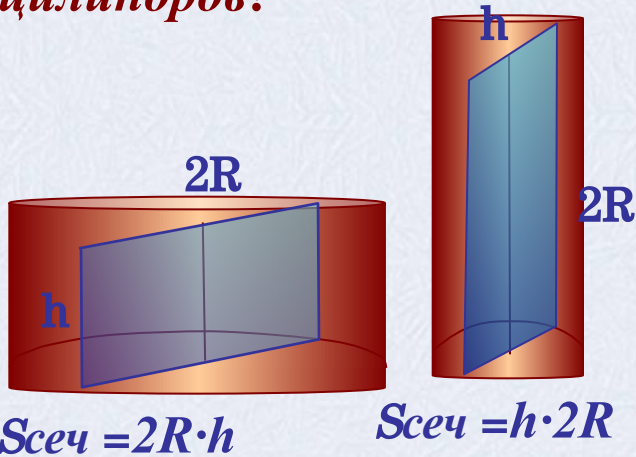
$$S_{\text{бок}} = 2\pi 2R h = 4\pi R h$$

Ответ: площадь боковой поверхности увеличится в 2 раза.



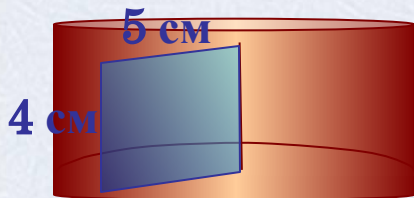
Решение устных задач с цилиндром

3) *Осевые сечения двух цилиндров равны. Равны ли высоты этих цилиндров?*



Ответ: нет

4) *Стороны прямоугольника равны 4 см и 5 см. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении этого прямоугольника вокруг меньшей стороны.*



$$R = 5 \text{ см}, \quad h = 4 \text{ см}$$

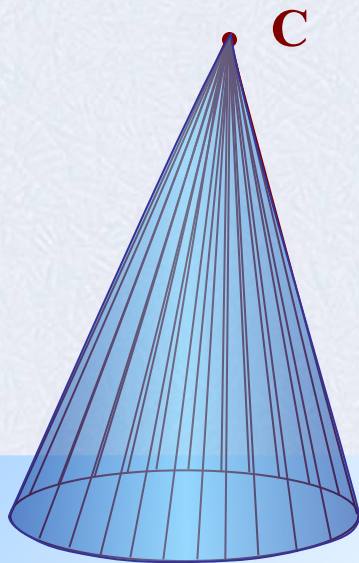
$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 5 \cdot (4 + 5) = 90\pi$$

Ответ: площадь полной поверхности равна $90 \pi \text{ см}^2$



Конус

Зададим плоскость α и точку C вне этой плоскости. В плоскости α расположим окружность некоторого радиуса. Проведем прямые проходящие через точку C и все точки окружности. Поверхность, образованная отрезками с концами на окружности и в точке C образуют *коническую поверхность*.

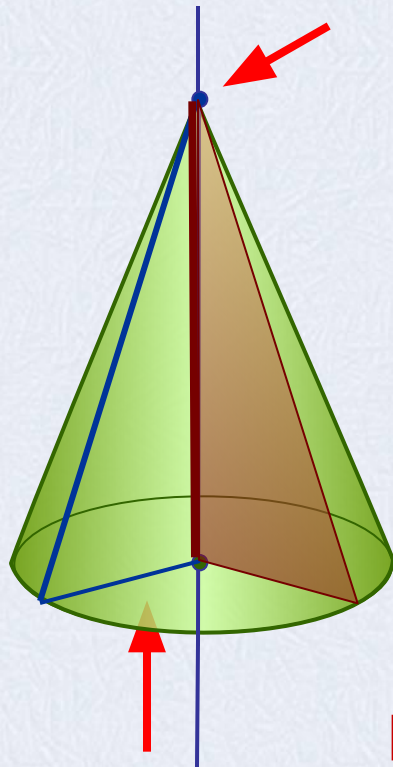


Конус – это тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, включая окружность.



Конус

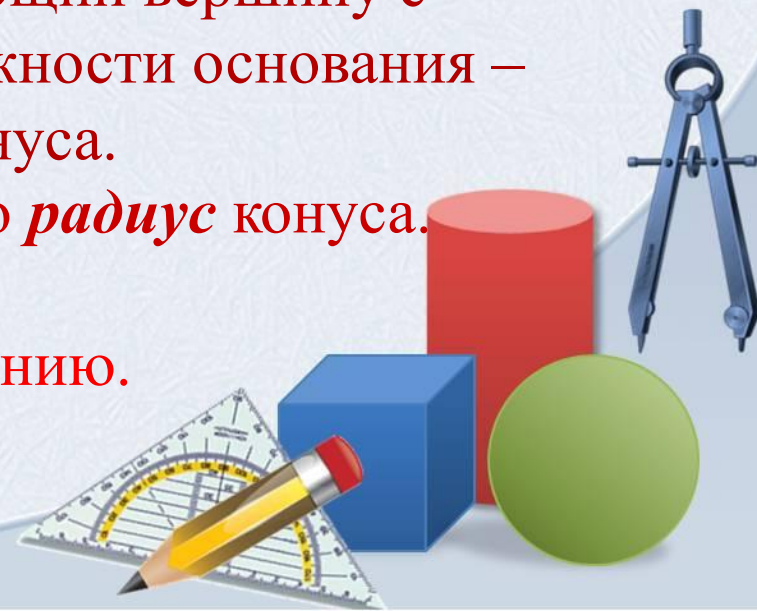
Конус – это тело, которое описывает прямоугольный треугольник при вращении вокруг оси, содержащей его катет.



- Круг – это *основание* конуса.
- Точка вне круга с которой соединяются все точки окружности – это *вершина* конуса.
- Прямая проходящая через центр круга и вершину конуса – есть *ось* конуса.
- Отрезок соединяющий вершину с любой точкой окружности основания – это *образующая* конуса.
- Радиус основания - это *радиус* конуса.

□ Высота конуса - это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса к основанию.

Замечание: так как ось перпендикулярна основанию и проходит через вершину, то высота конуса лежит на его оси.

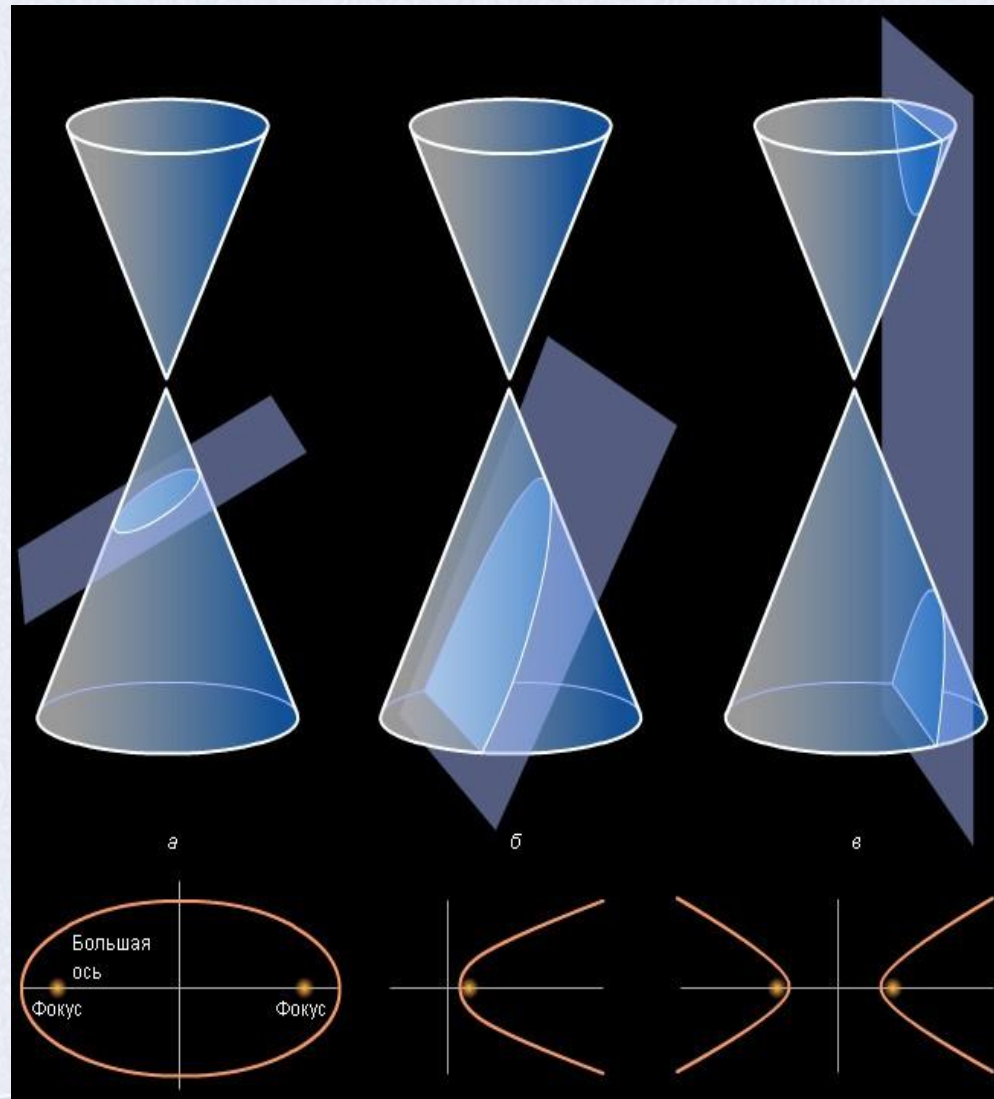
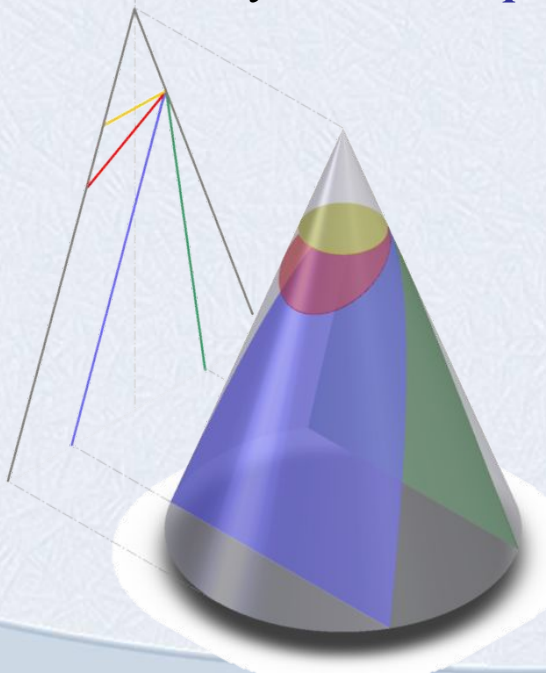


Конические сечения

1) Если плоскость пересекает все образующие конической поверхности, то в сечении получается *эллипс*.

2) Если плоскость сечения параллельна одной из образующих, то в сечении получается *парабола*.

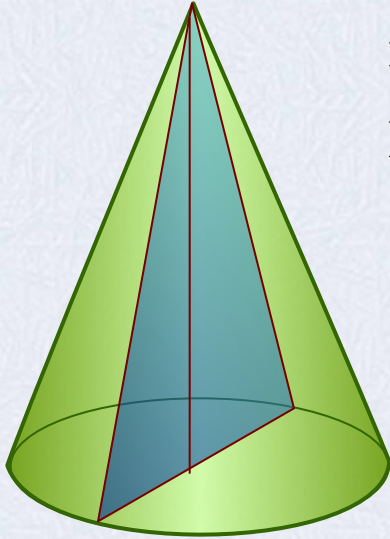
3) Если плоскость сечения пересекает обе полости конической поверхности, то в сечении получается *гипербола*.



Сечения конуса

Осевое сечение. Плоскость сечения содержит ось конуса и перпендикулярна основанию.

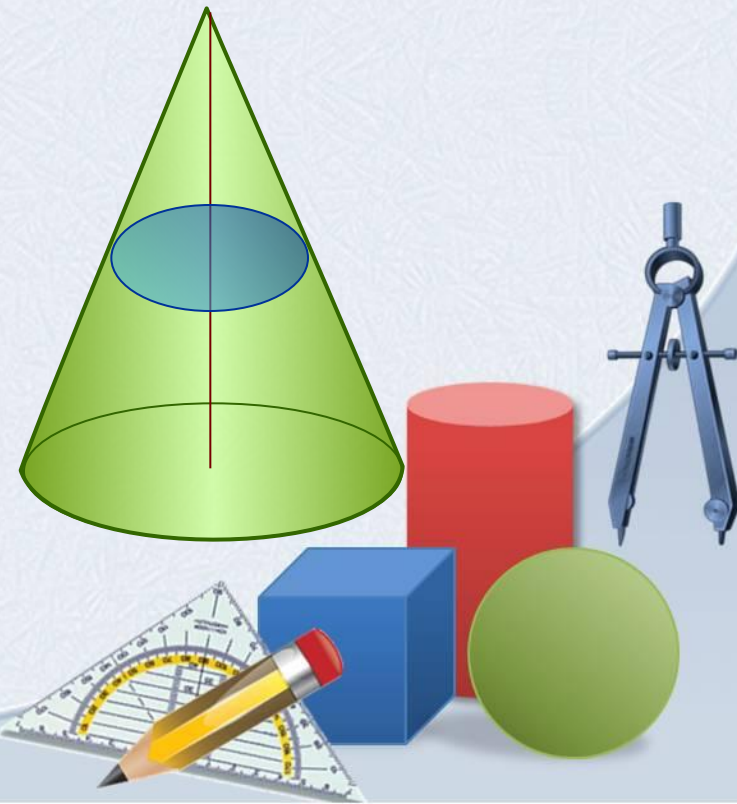
В сечении – *равнобедренный треугольник.*



Сечение плоскостью параллельной основанию конуса.

Плоскость сечения параллельна основанию конуса и перпендикулярна оси.

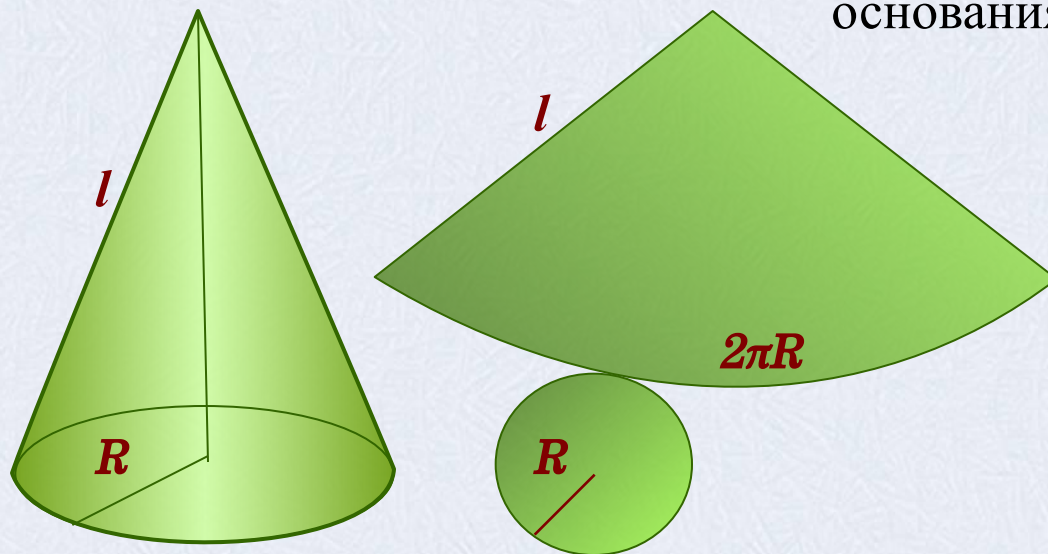
В сечении – *круг.*



Площадь поверхности конуса

Для вывода формулы площади полной поверхности конуса потребуется его развертка.

Полная поверхность состоит из основания и боковой поверхности.



Площадь основания находим как площадь круга $S = \pi R^2$

R – радиус основания цилиндра

Боковая поверхность конуса есть *сектор*.

Площадь боковой поверхности вычисляется как площадь сектора радиус которого равен длине образующей конуса (l), а дуга равна длине окружности основания ($2\pi R$).

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению радиуса на образующую и число π .

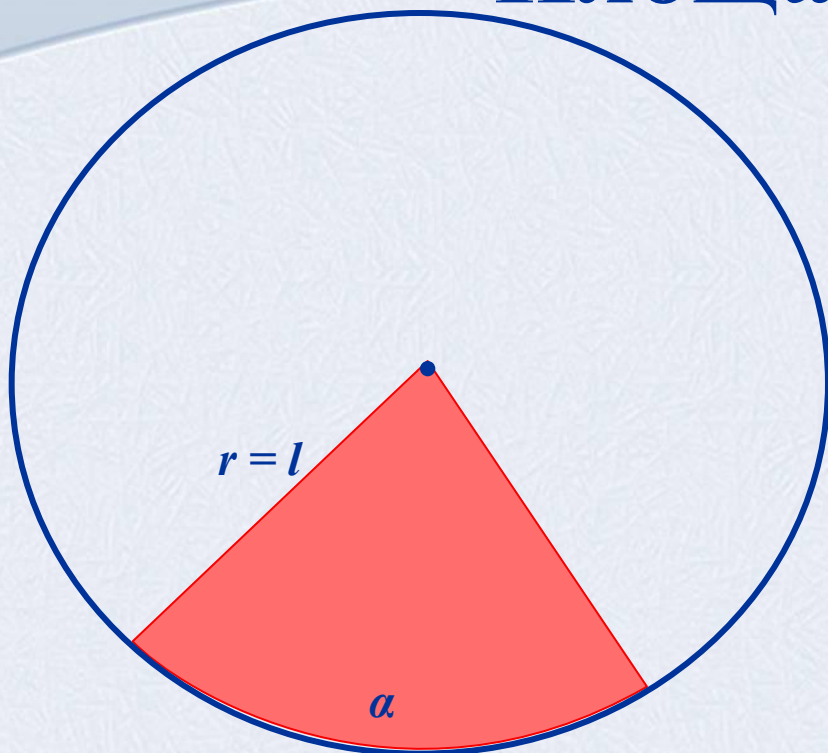
Получаем, $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi Rl + \pi R^2$

$$S_{\text{полн}} = \pi R(l + R)$$

Подробнее о площади сектора



Площадь сектора



r – радиус круга,
 α – величина дуги в градусах,
 R – радиус основания конуса,
 l – длина образующей конуса

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

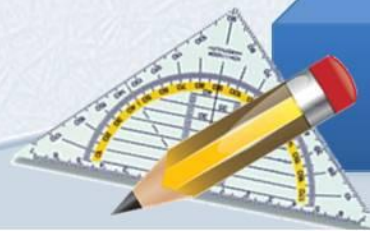
Вычисляя боковую поверхность конуса вписываем в данную формулу новые обозначения и выражаем α через радиус (R) и образующую (l). Длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса $2\pi R$, с другой стороны ее можно вычислить по формуле для длины дуги. Получаем равенство:

Выразим α и подставим в формулу площади сектора круга.

$$\alpha = \frac{360R}{l}$$

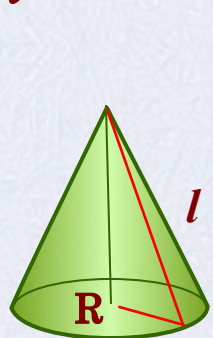
$$2\pi R = \frac{\pi l}{180^\circ} \alpha$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ R}{l} = \pi R l$$

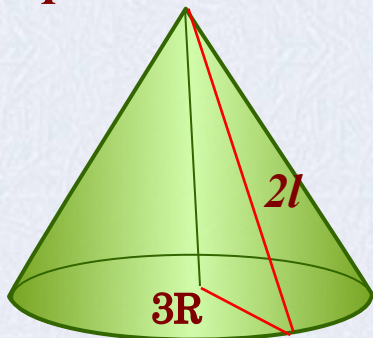


Решение устных задач с конусом

1) Во сколько раз увеличится боковая поверхность конуса, если его образующая увеличится вдвое, а радиус основания одновременно увеличится в 3 раза?



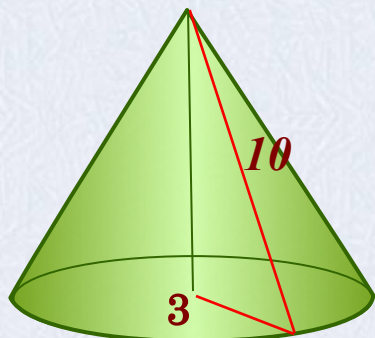
$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$



$$S_{\text{бок}} = \pi 3R 2l = 6\pi R l$$

Ответ: площадь боковой поверхности увеличится в 6 раз.

2) Вычислите площадь боковой и полной поверхностей конуса, длина образующей которого равна 10 см, а радиус основания 3 см.



$$S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

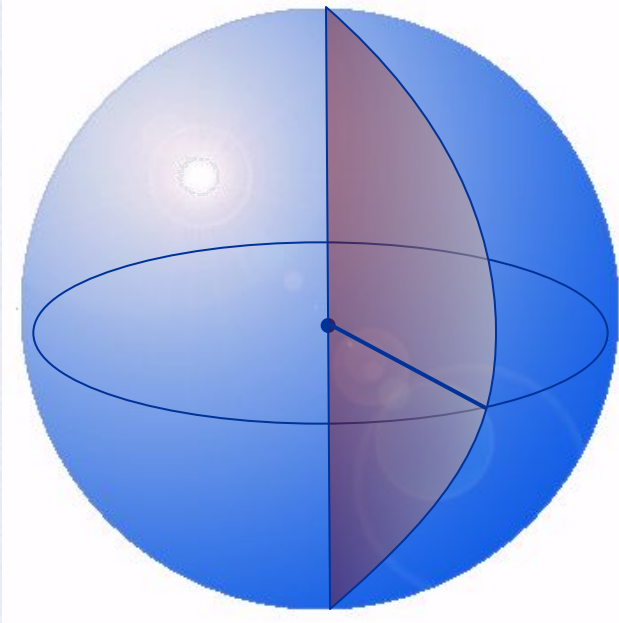
$$S_{\text{бок}} = \pi 3 \cdot 10 = 30\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{полн}} = 39\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $30\pi \text{ см}^2$, $39\pi \text{ см}^2$



Определение шара



Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от заданной точки точки.

Эта точка называется ***центром*** шара.

Расстояние от центра шара до любой точки поверхности называется – ***радиусом*** шара

Шар можно получить вращением полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр.

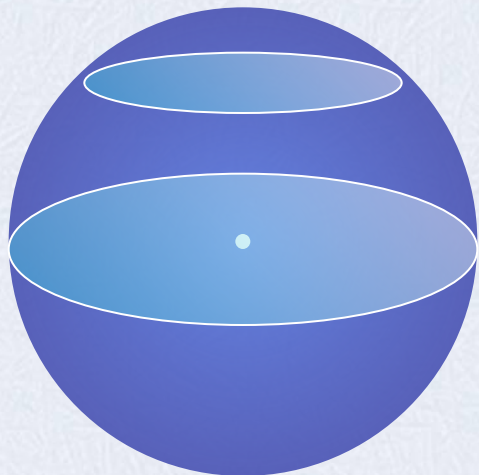
Сфера – это поверхность все точки которой равноудалены от заданной точки.



Сечения шара

Сечение шара, проходящее через его центр.

В сечении – *круг*.



В этом случае в сечении получается круг наибольшего радиуса, его называют *большой круг шара*.

Сечение плоскостью, не проходящей через центр.

В сечении – *круг*.

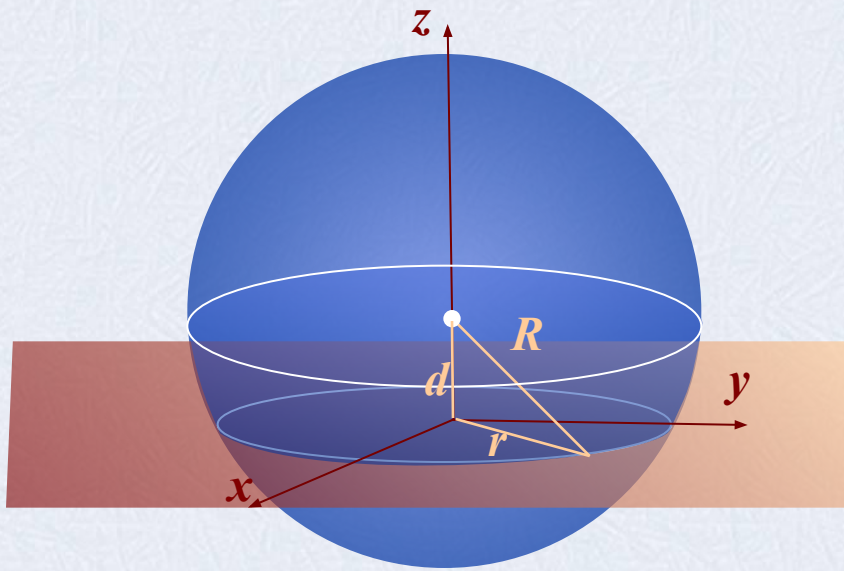
Теорема: Площадь поверхности шара равна четыре площади большого круга шара.

$$S = 4\pi R^2$$



Взаимное расположение сферы и плоскости

d – расстояние от центра сферы до плоскости, R – радиус сферы



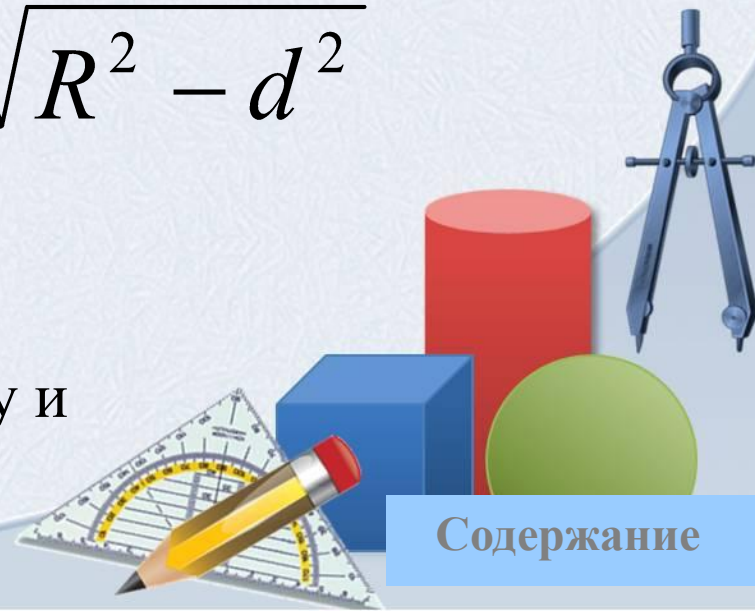
r – радиус сечения сферы

Вычислить радиус сечения можно используя теорему Пифагора.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$d < R$$

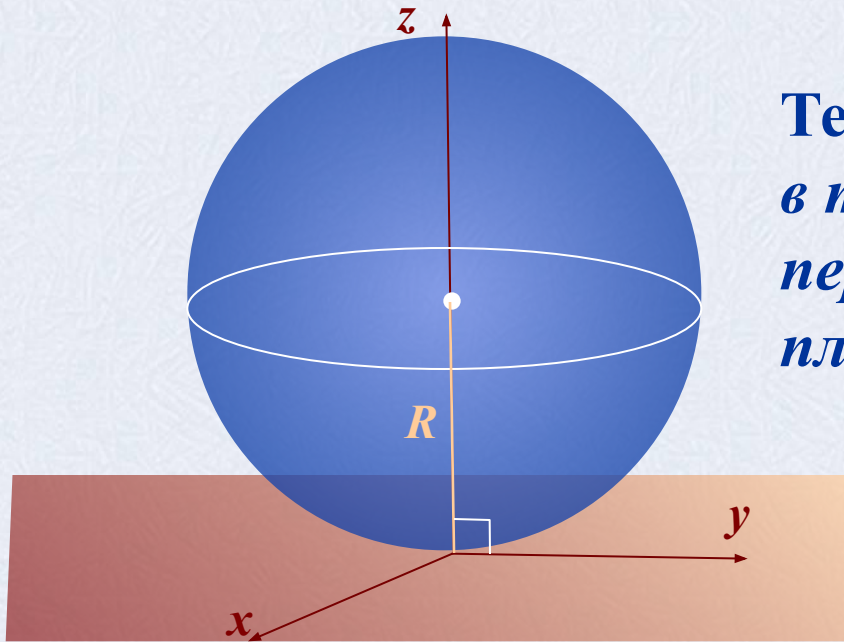
Плоскость пересекает сферу и называется *секущей*



Содержание

Взаимное расположение сферы и плоскости

d – расстояние от центра сферы до плоскости, R – радиус сферы



Теорема: Радиус сферы проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

$$R^2 - d^2 = 0$$

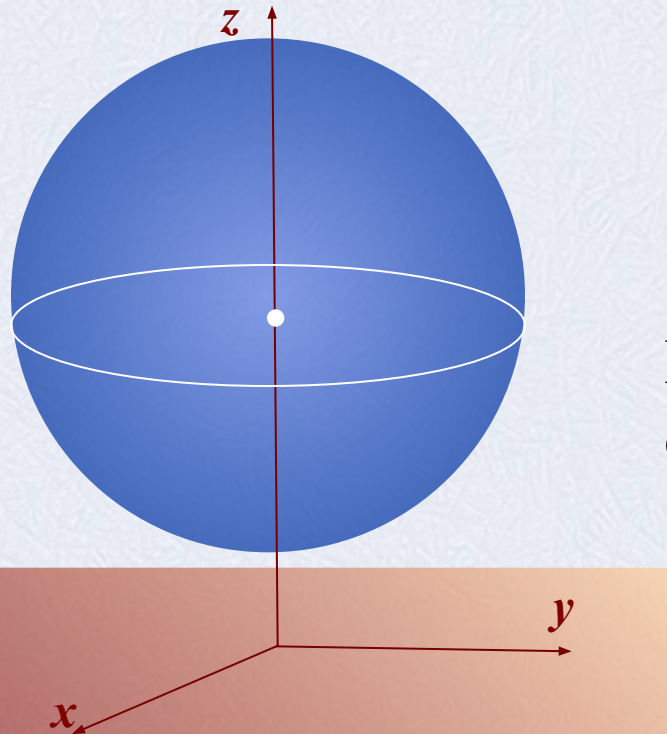
$$d = R$$

Плоскость имеет одну общую точку со сферой и называется *касательной*



Взаимное расположение сферы и плоскости

d – расстояние от центра сферы до плоскости, R – радиус сферы



$$d > R$$

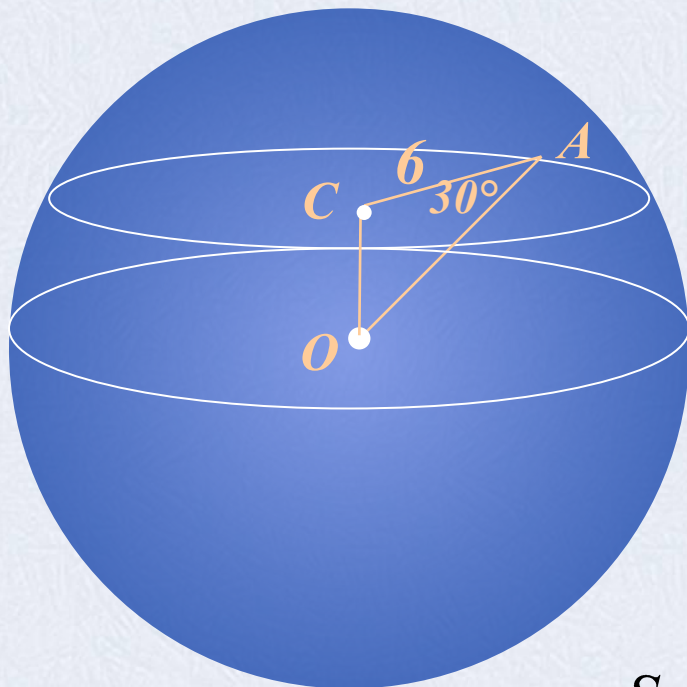
Плоскость не имеет общих точек со сферой.

$$R^2 - d^2 < 0$$



Решение задач

1) Вычислить площадь поверхности шара изображенного на рисунке.



$$S = 4\pi R^2$$

$$R = OA,$$

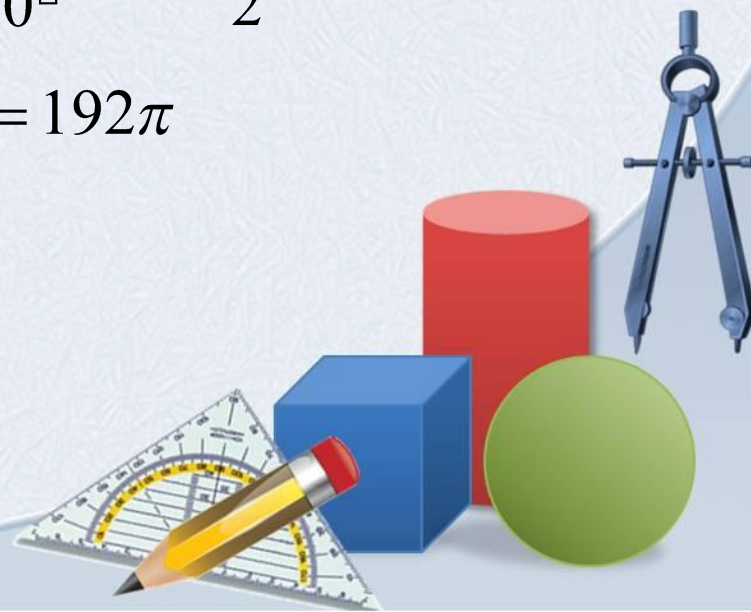
Найдем OA из $\triangle ACO$.

$$\cos A = \frac{CA}{OA} \Rightarrow OA = \frac{CA}{\cos A}$$

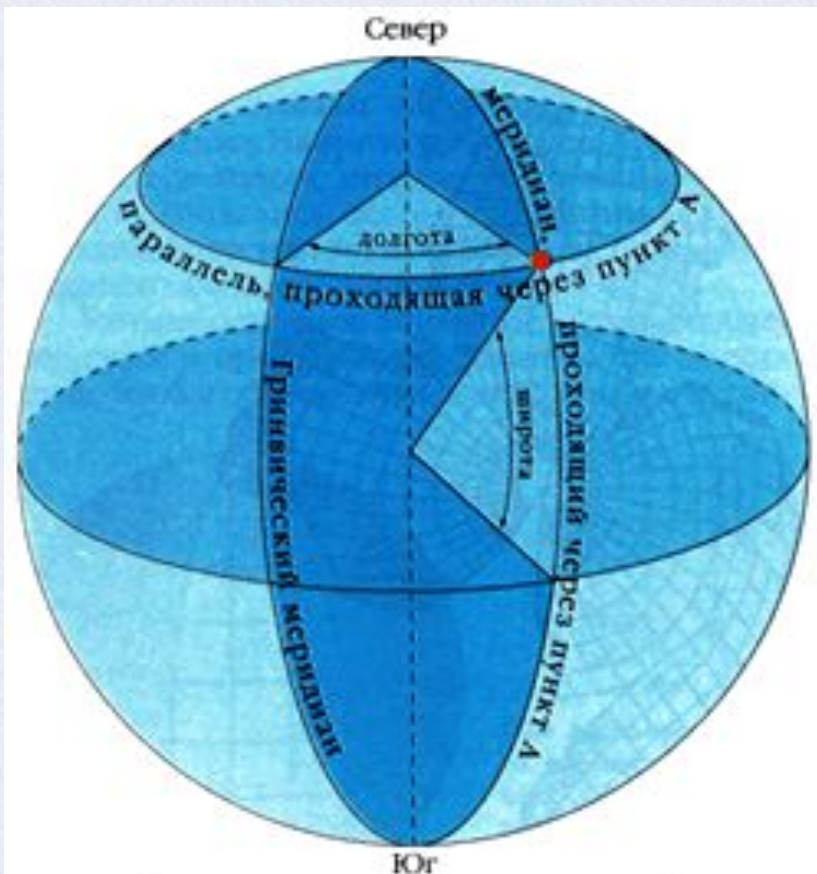
$$OA = \frac{6}{\cos 30^\circ} = 6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$S = 4\pi \cdot (4\sqrt{3})^2 = 192\pi$$

Ответ: $S = 192\pi \text{ ед}^2$



Географическая справка



Определение географических координат пункта А

Географические широты могут иметь значение от 0° до 90° . Географическая широта 90° находится у полюсов.

Под географической широтой понимают величину дуги от экватора к северу или к югу до заданной точки. Она тоже измеряется в градусах, так как широта точки есть угол между отвесной линией, проходящей через эту точку, и плоскостью экватора.

Северный полярный круг находится в $66^{\circ}33'44''$ ($66,5622^{\circ}$) к северу от экватора.



Литература

- **Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.** Геометрия, 10-11: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2010.
- **Бевз Г.П. и др.** Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1994.
- **Глейзер Г.Д.** Геометрия: Учеб. пособие для 10-12 кл.веч. (смен.) шк. и самообразования. – М.: Просвещение, 1989.
- **Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И.** Геометрия: Учеб. пособие для 9 и 10 классов. – М.: Просвещение, 1980.



Интернет ресурс

- О географической широте
- Географические координаты
- Изображение сечений моделей цилиндра
- Изображение тел вращения
- Юла
- Волчок
- Игрушка
- Изображение тора
- Колокольчик
- Песочные часы
- Картинка для титульного слайда
- Паровой котел
- Рассеченный конус
- Картинка с сечениями
- Планета Земля
- Космический корабль

