Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)

$$(f_k) \underset{\to}{\overset{\to}{}} f \text{ на C} \quad <=> \forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists n_0 \in \mathrm{N}: \ \forall m, n > n_0$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. (Необходимость). Пусть последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится к функции f равномерно на множестве C, то есть $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in N$ *такой, что при* $k \geq n_0$

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in C. \qquad (*)$$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists n_0 \in \mathrm{N}: \ \forall m, n > n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем номер n_0 так как в (*). Для него при $m, n \geq n_0$ имеем

$$\left|f_m(x)-f_n(x)\right| \le \left|f_m(x)-f(x)\right|+\left|f(x)-f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

Таким образом, условие Коши выполнено. Необходимость доказана.

(Достаточность). Пусть выполнено условие Коши.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists n_0 \in \mathrm{N}: \ \forall m,n > n_0$$
$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right| < \varepsilon. \qquad (**)$$

Фиксируем $x_0 \in C$. Тогда согласно (**) для числовой последовательности $a_n = f_n(x_0)$ имеем

$$\left|a_n - a_m\right| = \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| < \varepsilon .$$

Значит, числовая последовательность a_n фундаментальна, и, по критерию Коши для числовых последовательностей, сходится. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) := f(x_0)$ для всех $x_0 \in C$.

Таким образом, определена функция $f: C \to R$, к которой последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится поточечно. Докажем, что $f_k \rightrightarrows f$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и номер n_0 таков, что при $m, n \geq n_0$ $\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \forall x \in C$. (По (**) такое n_0 есть).

Зафиксируем $n \geq n_0$. Перейдем в (**) к пределу при $m \to \infty$.

Получим
$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall x \in C,$$
это и означает, что последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится равномерно. □

Замечание. Критерий Коши, выраженный теоремой 1, легко распространяется и на отображения $f_n : A \to M$, где М — метрическое пространство. Для формулировки и доказательства необходимо заменить в соответствующих местах знак модуля на соответствующую метрику.

Теорема 2 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве С тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in N : \forall n, m > n_0, \forall x \in C \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon .$$

Доказательство. Очевидно, по теореме 1.

Из теории числовых рядов мы знаем, что изучать их сходимость можно не находя их суммы. Для этого используют признаки сходимости. Далее сформулируем и докажем признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 3. (Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда)

Пусть заданы функциональная последовательность $\{f_k\}_{k\in N}$, $f_k : A \to R$, числовая последовательность $\{a_k\}_{k\in N}$, множество $C \subset A$. Пусть $\forall x \in C$, $|f_k(x)| \le a_k$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на С и абсолютно в любой точке $x \in C$.

Доказательство. Для любого $x \in C$ **абсолютная** сходимость (то есть сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$) следует из первого признака сравнения. Для доказательства равномерной сходимости используем критерий Коши (теорема 2).

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку по условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то, используя критерий Коши для числовых рядов, определим номер n_0 так, что при $n > m \geq n_0$ $\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$.

Тогда $\forall x \in C$ имеем

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon,$$

что и требуется для равномерной сходимости по теореме 2.

□

Пример использования мажорантного признака Вейерштрасса приведём на лекции.

Теорема 4. (Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда).

Пусть для функциональных последовательностей $\{f_k\}_{k\in N}, \{g_k\}_{k\in N}$, $f_k, g_k : A \to R$ выполнены условия:

1) последовательность $\{g_k\}_{k\in N}$ равномерно сходится к нулю на множестве $C \subset A$, причем для каждого $x \in C$ последовательность $\{g_k(x)\}_{k\in N}$ монотонно убывает;

2) частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно ограничены, то есть

$$\exists B : \forall x \in C, \forall n \in N \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le B.$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot g_k$ сходится равномерно на множестве С.

Доказательство. Основано на преобразовании Абеля:

$$\sum_{k=m+1}^{n} f_k \cdot g_k = \sum_{k=m}^{n} S_k \cdot (g_k - g_{k+1}) - g_m \cdot S_m + g_{n+1} \cdot S_n ,$$

где $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Доказывать равномерную сходимость будем с помощью критерия Коши (теорема 2). Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку по условию $\{g_k(x)\}_{k \in N}$ равномерно сходится к нулю на С, выберем номер n_0 так, что при $n \geq n_0$ $|g_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4B}, \forall x \in C$.

Учитывая преобразование Абеля и тот факт, что последовательность $\{g_k(x)\}_{k \in N}$ монотонно убывает, получим утверждение теоремы. □

Подробные выкладки и пример использования приведем на лекции.

Теорема 5. (Признак Абеля)

Пусть для функциональных последовательностей $\{f_k\}_{k\in N}, \{g_k\}_{k\in N}$, $f_k, g_k : A \to R$ выполнены условия:

1) для любого $x \in C$ последовательность $\{g_k\}_{k\in N}$ монотонна и равномерно ограничена, то есть $\exists D > 0$ такое, что $|g_n(x)| \le D, \forall n \in N$;

2) функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на С.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot g_k$ сходится равномерно на множестве С.

Доказательство опустим ввиду отсутствия времени.

§2. Использование равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 1. (О непрерывности предела равномерно сходящейся функциональной последовательности)

Пусть задана функциональная последовательность $\{f_k\}_{k\in N}$, $f_k : A \to R$, множество $C \subset A$. Пусть $f_k \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} f$ на C. Тогда f непрерывна.