

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)

$$(f_k) \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \rightarrow \end{matrix} f \text{ на } C \iff \forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n > n_0$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. (Необходимость). Пусть последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к функции f равномерно на множестве C , то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при $k \geq n_0$

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in C. \quad (*)$$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n > n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем номер n_0 так как в (*). Для него при $m, n \geq n_0$ имеем

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, условие Коши выполнено. Необходимость доказана.

(Достаточность). Пусть выполнено условие Коши.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n > n_0$$
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (**)$$

Фиксируем $x_0 \in C$. Тогда согласно (**), для числовой последовательности $a_n = f_n(x_0)$ имеем

$$|a_n - a_m| = |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Значит, числовая последовательность a_n фундаментальна, и, по критерию Коши для числовых последовательностей, сходится. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) := f(x_0) \text{ для всех } x_0 \in C.$$

Таким образом, определена функция $f : C \rightarrow R$, к которой последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится поточечно. Докажем,

что $f_k \xrightarrow{\rightarrow} f$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и номер n_0 таков, что при $m, n \geq n_0$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in C$. (По (**)) такое n_0 есть).

Зафиксируем $n \geq n_0$. Перейдем в (***) к пределу при $m \rightarrow \infty$.

Получим $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall x \in C$,

это и означает, что последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится равномерно. \square

Замечание. Критерий Коши, выраженный теоремой 1, легко распространяется и на отображения $f_n : A \rightarrow M$, где M — метрическое пространство. Для формулировки и доказательства необходимо заменить в соответствующих местах знак модуля на соответствующую метрику.

Теорема 2 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве S тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_0, \forall x \in S \quad \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Очевидно, по теореме 1.

Из теории числовых рядов мы знаем, что изучать их сходимость можно не находя их суммы. Для этого используют признаки сходимости. Далее сформулируем и докажем признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 3. (Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда)

Пусть заданы функциональная последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$, числовая последовательность $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, множество

$C \subset A$. Пусть $\forall x \in C$, $|f_k(x)| \leq a_k$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на C и абсолютно в любой точке $x \in C$.

Доказательство. Для любого $x \in C$ абсолютная сходимость (то есть сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$) следует из первого признака сравнения. Для доказательства равномерной сходимости используем критерий Коши (теорема 2).

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку по условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то, используя критерий Коши для числовых рядов, определим номер n_0 так, что при $n > m \geq n_0$ $\sum_{k=m+1}^n a_k < \varepsilon$.

Тогда $\forall x \in C$ имеем

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n a_k < \varepsilon,$$

что и требуется для равномерной сходимости по теореме 2. □

Пример использования мажорантного признака Вейерштрасса приведём на лекции.

Теорема 4. (Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда).

Пусть для функциональных последовательностей $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k, g_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены условия:

1) последовательность $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится к нулю на множестве $C \subset A$, причем для каждого $x \in C$ последовательность $\{g_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ монотонно убывает;

2) частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно ограничены, то

есть

$$\exists B : \forall x \in C, \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq B.$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot g_k$ сходится равномерно на множестве C .

Доказательство. Основано на преобразовании Абеля:

$$\sum_{k=m+1}^n f_k \cdot g_k = \sum_{k=m}^n S_k \cdot (g_k - g_{k+1}) - g_m \cdot S_m + g_{n+1} \cdot S_n,$$

где $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$.

Доказывать равномерную сходимость будем с помощью критерия Коши (теорема 2). Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку по условию $\{g_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится к нулю на C , выберем номер

n_0 так, что при $n \geq n_0$ $|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4B}, \forall x \in C$.

Учитывая преобразование Абеля и тот факт, что последовательность $\{g_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ монотонно убывает, получим утверждение теоремы. \square

Подробные выкладки и пример использования приведем на лекции.

Теорема 5. (Признак Абеля)

Пусть для функциональных последовательностей $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k, g_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены условия:

1) для любого $x \in C$ последовательность $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ монотонна и равномерно ограничена, то есть $\exists D > 0$ такое, что $|g_n(x)| \leq D, \forall n \in \mathbb{N}$;

2) функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на C .

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot g_k$ сходится равномерно на множестве C .

Доказательство опустим ввиду отсутствия времени.

§2. Использование равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 1. (О непрерывности предела равномерно сходящейся функциональной последовательности)

Пусть задана функциональная последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$,

$f_k : A \rightarrow R$, множество $C \subset A$. Пусть $f_k \xrightarrow{\rightarrow} f$ на C . Тогда f

непрерывна.