

Вершины, ребра и грани

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой V – число вершин, P – число ребер, Γ – число граней многогранника.

Название многогранника	V	P	Γ
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n -угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n -угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Из приведенной таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство $V - P + G = 2$. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

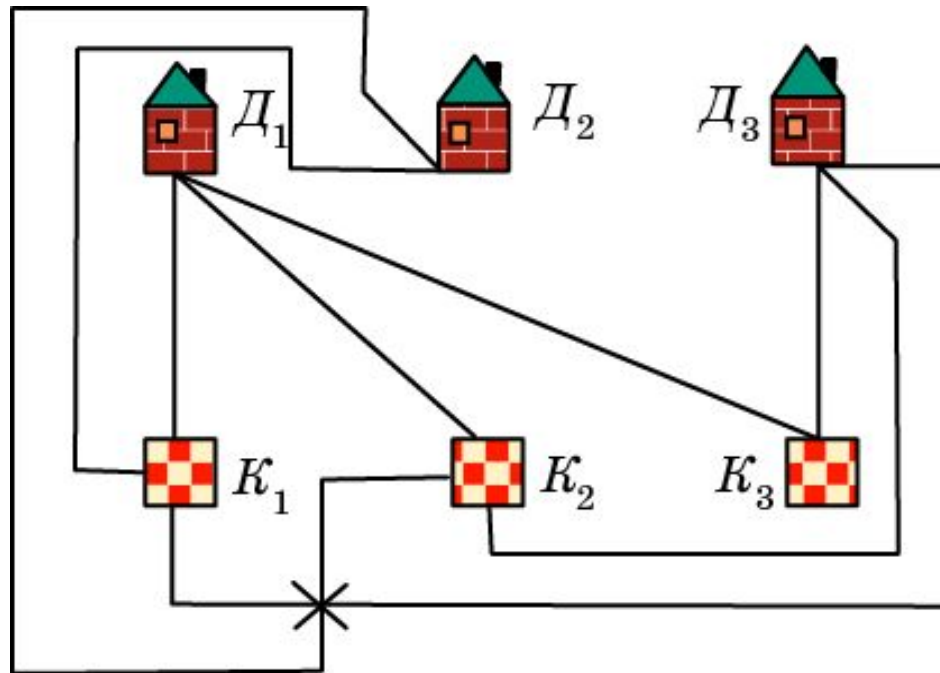
Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$V - P + G = 2,$$

где V - число вершин, P - число ребер и G - число граней данного многогранника.

Задача о трех домиках и трех колодцах

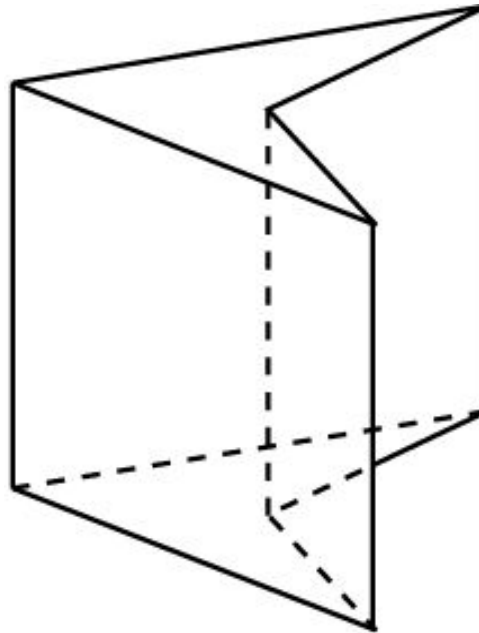
Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?



Ответ: Нет.

Упражнение 1

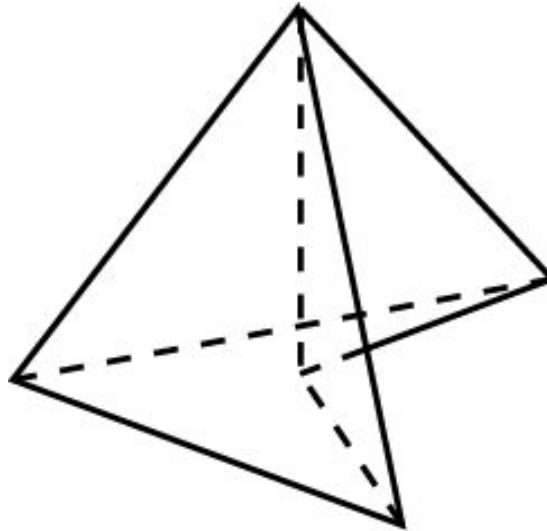
Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой призмы?



Ответ: Да.

Упражнение 2

Выполняется ли соотношение Эйлера для невыпуклой пирамиды?

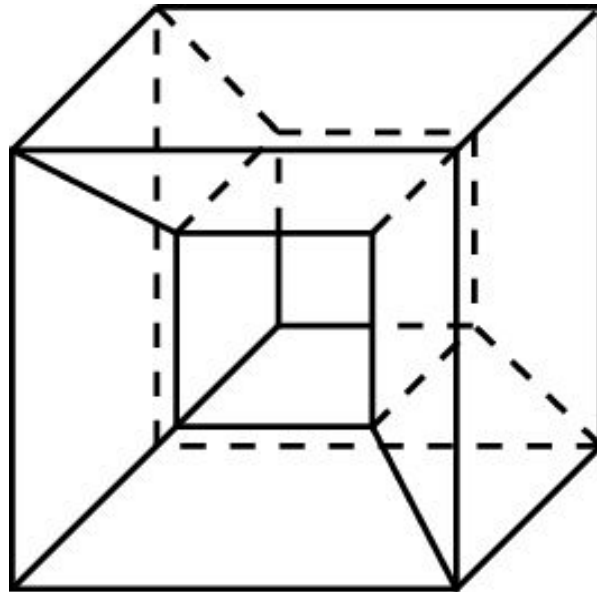


Ответ: Да.

Упражнение 3

Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

Ответ: Например, куб, из которого вырезан прямоугольный параллелепипед.



Упражнение 4

Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер?

Ответ: а) $V = 6$, $\Gamma = 8$; б) $V = 7$, $\Gamma = 10$.

Упражнение 5

Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно: а) 12; б) 15?

Ответ: а) $V = 8$, $\Gamma = 6$; б) $V = 10$, $\Gamma = 7$.

Упражнение 6

Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

Ответ: $V = 8$, $\Gamma = 6$, куб.

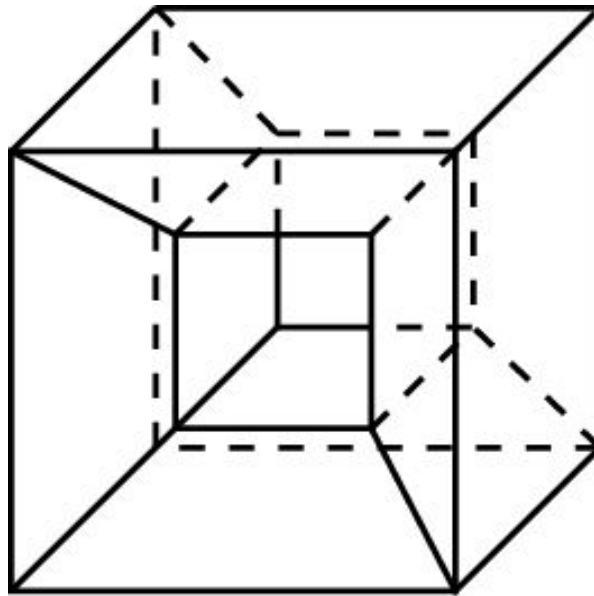
Упражнение 7

В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

Ответ: $V = 6$, $\Gamma = 8$, октаэдр.

Упражнение 8

Чему равна эйлерова характеристика многогранника ($V - P + \Gamma$, где V – число вершин, P – рёбер и Γ – граней многогранника), представленного на рисунке?



Ответ: 0.

Упражнение 9

Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если к одной из его граней пристроить пирамиду? Изменится ли $V - P + G$?

Ответ: Пусть пристроена n -угольная пирамида, тогда количество вершин станет $(V+1)$, рёбер - $(P+n)$, граней - $(G+n)$. $V - P + G$ не изменится.

Упражнение 10

Как изменится число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника, если от него отсечь один из многогранных углов? Изменится ли $V - P + \Gamma$?

Ответ: Пусть отсекли m -гранный угол, тогда количество вершин будет $(V+m-1)$, рёбер - $(P+m)$, граней - $(\Gamma+1)$. $V - P + \Gamma$ не изменится.