

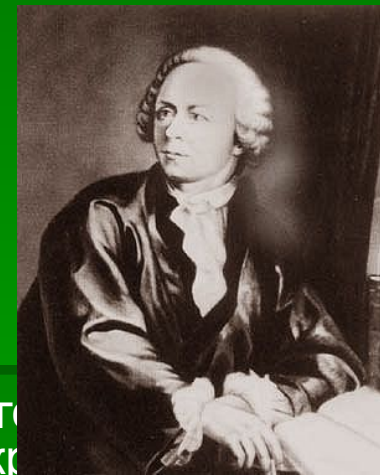
# Теорема Эйлера

- Автор работы: Ужга Андрей  
ученик 10 класса  
МОУ.СОШ. п.Донское
- Руководитель: Шинкоренко Т.П.  
учитель алгебры и геометрии  
высшей квалификационной категории  
2008г.

# Теорема Эйлера

- Теорема Эйлера- математическое утверждение, связывающее между собой число ребер, граней и вершин многогранников. Она хорошо известна и присутствует в продвинутых школьных курсах математики. Но там она используется для выяснения того, какие многогранники могут существовать, поэтому остается невскрытой топологическая сущность этой теоремы и ее роль в классификации поверхностей, не выясняется роль эйлеровой характеристики с родом поверхности.

# Леонард Эйлер (1707-1783)



- Эта теорема была забыта более чем на 200 лет, но в 1736 году русский математик Леонард Эйлер доказал ее, и теперь она носит его имя.

- В 2007 году исполняется 300 лет со дня рождения одного из величайших математиков. Эйлер оказал решающее влияние на развитие математики. Он был действительно гениальным человеком, оказавшим большое влияние на развитие науки. В деле подготовки будущих математиков жизни им опубликовано более 800 работ. Причиной его болезни болел, ослеп на оба глаза, но продолжал работать с величайшим спокойствием: «Я не перестал заниматься математикой». Эйлер сохранил работоспособность (он просто не мог не заниматься математикой или ее приложениями).



в 1640 году в Швейцарии, в городе Базеле. Его имя приоткрыло путь к открытию, имя которого она

и Леонарда Эйлера-младшего, работы которого оказали огромное влияние на развитие различных разделов математики. Он работал в России, был членом Петербургской Академии наук, оказал огромное влияние на развитие математической школы и в подготовке педагогов России. При этом сейчас их известно уже не так много. Эйнштейн тяжело переживал тяжелый недуг он пережил, поэтому с величайшим трудом от занятий математикой, феноменальную

работоспособность (он просто не мог не заниматься математикой или ее приложениями).



# Леонард Эйлер — математик, физик механик и астроном



Эйлер принадлежит к числу гениев, чьё творчество стало достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придал им Эйлер.

Студенты проходят высшую математику по руководствам, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера.

Он был прежде всего математиком, но он знал, что почвой, на которой расцветает математика, является практическая деятельность. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук.

# Периоды жизни

Назад

- 20 октября 1720 года, Эйлер стал студентом факультета искусств Базельского университета.
- 4 июня 1724 года, Эйлер произнёс по латыни великолепную речь о сравнении философских воззрений Декарта и Ньютона — и был удостоен учёной степени магистра.
- 5 апреля 1727 года, Эйлер навсегда покидает Швейцарию, по совету братьев Бернулли его пригласили стать адъюнктом по физиологии в Санкт-Петербурге.
- 1733 год. 26-летний Леонард Эйлер женился на дочери живописца Екатерине Гзель, которой в это время тоже было 26 лет.
- 1736 год. Издано двухтомное сочинение «Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении».
- 1741 год. В соответствии с поданным Эйлером прошением, он был «отпущен от Академии» и утверждён почётным академиком. Он обещал по мере своих сил помогать Петербургской Академии — и действительно помогал весьма существенно все 25 лет, пока не вернулся обратно в Россию. В июне 1741 г. Леонард Эйлер с женой, двумя сыновьями и четырьмя племянниками прибыл в Берлин.
- 15 апреля 1707 года, родился Леонардо Эйлер.
- 1757 год. Эйлер впервые в истории нашёл формулы для определения критической нагрузки при сжатии упругого стержня. Однако в те годы эти формулы не могли найти практического применения.
- 30 апреля 1766 года. Эйлер получает разрешение на выезд из Берлина в Россию.
- 1771 год. Сгорела библиотека со множеством трудов Леонардо Эйлера, но в течении некоторого времени Эйлер восстанавливает утраченные труды по памяти. В сентябре того же года в Санкт-Петербург прибыл известный немецкий окулист барон Венцель, который согласился сделать Эйлеру операцию — и удалил с левого глаза катаракту. Но вся операция заняла 3 минуты — и Эйлер снова стал видеть! Искусный окулист предписал беречь глаз от яркого света, не писать, не читать — лишь постепенно привыкать к новому состоянию. Эйлер нарушил эти наставления и на следующий день начал писать свои труды дальше, окончательно потеряв зрение.
- 1773 год. Умерла жена Эйлера.
- В сентябре 1783 г. учёный стал ощущать головные боли и слабость. 7 сентября после обеда, проведённого в кругу семьи, беседа с А. И. Лекселем об недавно открытой планете Уран и её орбите, он внезапно почувствовал себя плохо. Эйлер успел произнести «Я умираю» — и потерял сознание. Через несколько часов, так и не придя в сознание, он скончался от кровоизлияния в мозг. «Эйлер перестал жить и вычислять». Его похоронили на Смоленском кладбище в Петербурге. Надпись на памятнике гласила: «Леонарду Эйлеру — Петербургская Академия».

# Суть теоремы



- Рассмотрим многогранники известные нам из школьной программы- тетраэдр и куб, которые имеют вершины( $V$ ), ребра( $P$ ) и грани( $G$ ). Составим для них табличку:

Название многогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней	$\Sigma = V + G - P$
Тетраэдр	4	4	6	2
Куб	8	6	12	2
Треугольная пирамида	4	6	4	2
Треугольная призма	6	9	5	2
n- угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$	2
n- угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$	2
n- угольная усеченная пирамида	$2n$	$3n$	$n+2$	2

- Несмотря на различия самих многогранников и различия их величин  $V, Г,$  и  $P,$  значение  $\mathcal{E}$  остается постоянным и равным 2. значит, имеет место неравенство:

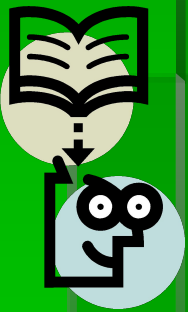
$$V+Г-P=2$$

которое и называется теоремой Эйлера для многогранников.



# Теорема Эйлера для простейших многогранников

- Пусть  $G = \{r \mid r = (x, y, z)\}$  и  $G' = \{r' \mid r' = (x', y', z')\}$  – два точечных множества в трехмерном пространстве (не исключая возможности того, что  $G$  и  $G'$  лежат на каких-либо кривых или принадлежат каким-либо плоскостям).



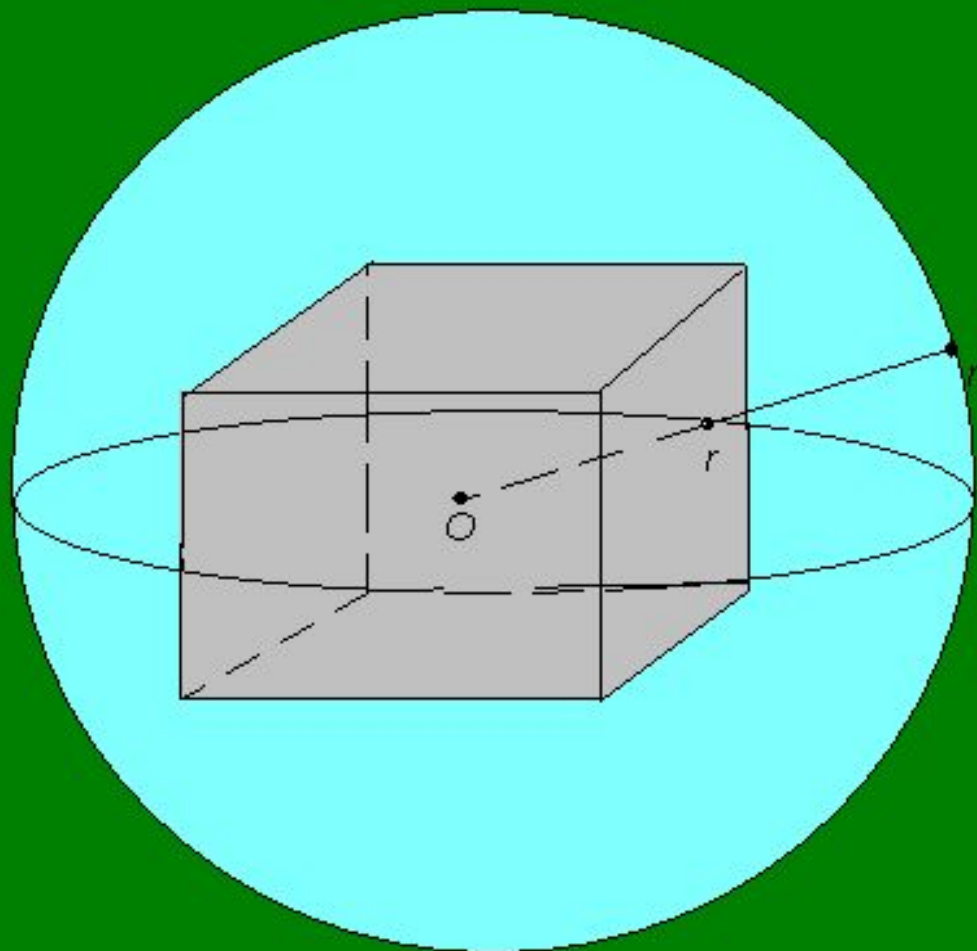


Обязательные условия, выполняемые при гомеоморфизме:

- 1. Каждой точке  $r$  из  $G$  отображение  $f(r)$  ставит в соответствие единственную точку  $r'$  из  $G'$  и для любой точки  $r'$  из  $G'$  существует единственная точка  $r$  из  $G$ , для которой  $f(r) = r'$ .
- 2. Для любых  $r_1, r_2$  из  $G$ ,  $r'_1 = f(r_1)$ ,  $r'_2 = f(r_2)$ :  
если  $|r_1 - r_2| > 0$ , то  $|r'_1 - r'_2| > 0$ ;  
если  $|r'_1 - r'_2| > 0$ , то  $|r_1 - r_2| > 0$ .

Условие 1 есть требование взаимной однозначности отображения  $r' = f(r)$ : разные точки под действием  $f(r)$  переходят в разные.

Условие 2 есть требование непрерывности отображения  $f(r)$  и его обратного  $f^{-1}(r')$ : близкие точки  $r_1$  и  $r_2$  из  $G$  должны отображаться в близкие точки из  $G'$  и, наоборот, близкие точки  $r'_1$  и  $r'_2$  из  $G'$  должны иметь близкие прообразы  $r_1$  и  $r_2$  в  $G$ .



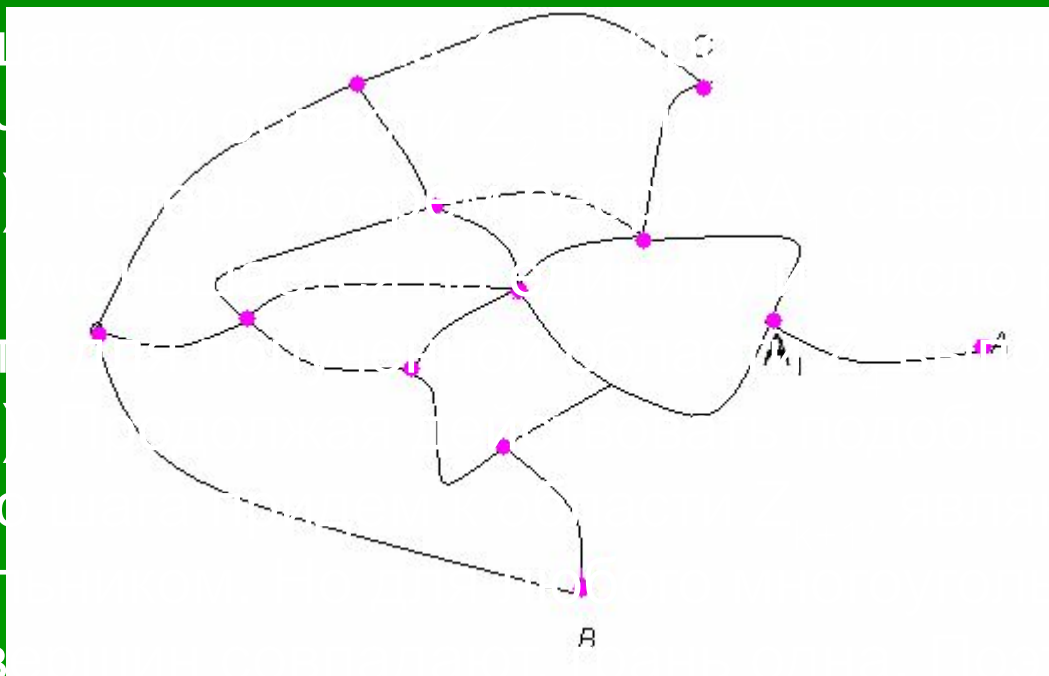
- Нетрудно показать также, что замкнутая ломаная линия без самопересечений гомеоморфна окружности, что парабола гомеоморфна прямой и т.д. В то же время, например, отрезок прямой негеоморфен окружности. Действительно, если бы отрезок был гомеоморфен окружности, то отрезок с выколотой точкой был бы гомеоморфен окружности с выколотой точкой. Но это невозможно, поскольку отрезок с выколотой точкой есть множество несвязное и при гомеоморфизме он должен отображаться в несвязное множество, а окружность с выколотой точкой является множеством связным. Точно также можно показать, что отрезок негеоморфен кругу.
- В качестве распространенного и наглядного примера гомеоморфного отображения поверхности можно рассматривать ее деформацию при условии, что эта деформация не разрывает поверхности (является непрерывной) и не приводит к склеиванию различных точек (то есть является взаимно однозначной).







- Для нахождения  $\mathcal{E}(Z_1)$  будем последовательно упрощать область  $Z_1$ , убирая ребра, грани и вершины так, чтобы на каждом этапе величина  $\mathcal{E} = V + G - P$  не менялась. В качестве

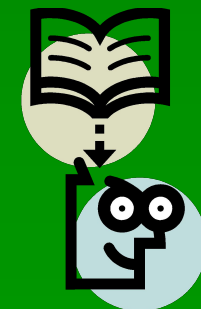


первого шага удалим ребро  $\alpha$ . Ясно, что  $\mathcal{E}(Z_2) = \mathcal{E}(Z_1) - 1$ . Аналогично, удалив ребро  $\beta$ , получим  $\mathcal{E}(Z_3) = \mathcal{E}(Z_2) - 1$ . Продолжая этот процесс, удалим все ребра, грани и вершины, пока не останется одна вершина  $A$ . Т.к.  $\mathcal{E}(A) = 1$ , то  $\mathcal{E}(Z_k) = 1$ . Таким образом,  $\mathcal{E}(Z_1) = 1$ . По построению,  $\mathcal{E}(Z_1) = \mathcal{E}(Z_{k+1}) = 1$ , и в силу (2)  $\mathcal{E}(Z_0) = 2$ .

$$\mathcal{E}(Z_0) = \mathcal{E}(Z_1) + 1. \quad (2)$$

Теорема доказана.

- Самым поучительным в приведенном доказательстве является то, что оно верно не только для многогранников. Рассмотрим произвольную пространственную фигуру, гомеоморфную шару. Нанесем на ее поверхность  $Z$  криволинейную сетку  $L$  разбивающую  $Z$  на конечно число областей, гомеоморфных кругу, которые мы назовем гранями. Пусть  $P(Z)$ ,  $\Gamma(Z)$  и  $B(Z)$  суть соответственно число ребер, граней и вершин сетки  $L$  и  $\mathcal{E}(Z) = B(Z) + \Gamma(Z) - P(Z)$ . Отобразив  $Z$  гомеоморфно на поверхность какой-либо сферы и рассуждая аналогично предыдущему, получим  $\mathcal{E}(Z) = 2$ . Таким образом, мы установили, что все гомеоморфные сфере поверхности  $Z$  имеют одну и ту же величину эйлеровой характеристики  $\mathcal{E}(Z)$  - число 2. Обратим внимание на то, что значение  $\mathcal{E}(Z)$  оказалось не зависящим от площади и числа граней, длин и числа ребер, углов пересечения ребер и числа верши сетки и т.д. Другими словами, эйлерова характеристика не связана с метрическими свойствами поверхностей, а отображает более глубокие свойства.
- Ясно, например, что объем, ограниченный поверхностью  $Z$ , или площадь  $Z$  не относятся к топологическим свойствам. В отличие от них эйлерова характеристика является топологическим свойством поверхности. Более того, она определяет тип поверхности в том смысле, что если для какой-то поверхности эйлерова характеристика равна двум, то эта поверхность гомеоморфна сфере.



- Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии- раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек.

## Приложения теоремы Эйлера

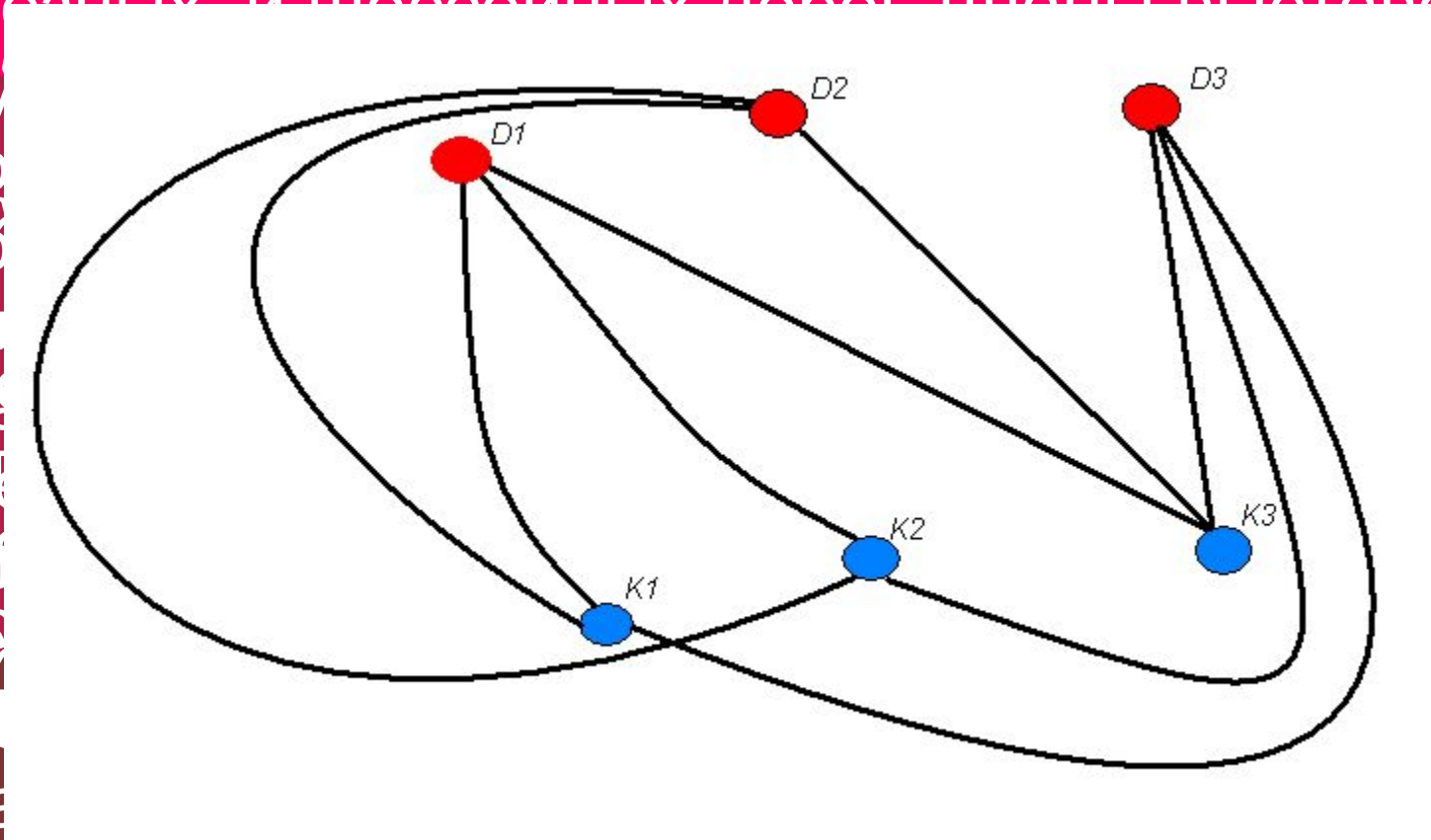
Такие свойства фигур называются топологическими.

Соотношение Эйлера  $V-P+\Gamma=2$  для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, но их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

При доказательстве соотношения Эйлера мы уж использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. При этом на плоскости получался многоугольник, подразделенный на более мелкие многоугольники, для которых справедливо соотношение  $V-P+\Gamma^1=1$ , где  $V$ - число вершин,  $P$ - число ребер и  $\Gamma^1$ - число граней (многоугольников). Ребра и сами многоугольники могут быть искривлены, и это не влияет на соотношение Эйлера.



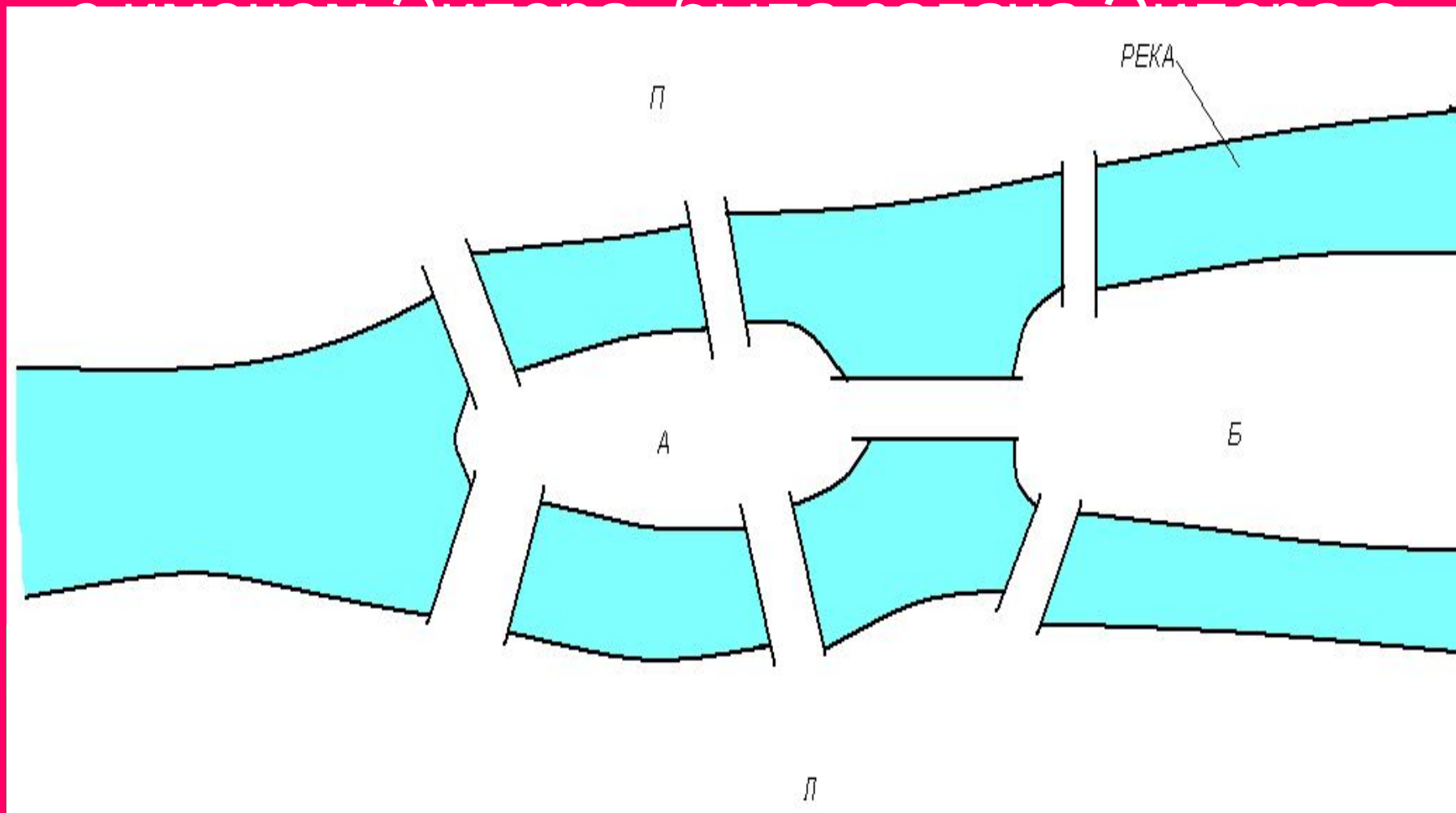
- Совокупность вершин и соединяющих их ребер на плоскости называется **графом**. Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы вылетов,



о трех домиках и трех колодцах, которую мы сейчас и рассмотрим.

- Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, подразделенный на более мелкие многоугольники- грани. Поэтому для числа вершин, ребер и граней должно выполняться соотношение Эйлера  $V-P+G=1$ . Добавим к рассматриваемым граням еще одну грань- Внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид  $V-P+G=2$ , причем  $V=6$  и  $P=9$ . Следовательно,  $G=5$ . Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то количество ребер должно быть не меньше  $5 \times 4 / 2 = 10$ , что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен- нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

- Другой задачей-головоломкой, связанной



- Эта задача связана с другими головоломкам, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т.е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые уникурсальные графы.

- На рисунке изображен граф, соответствующий задаче о кенигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф является уникурсальным.

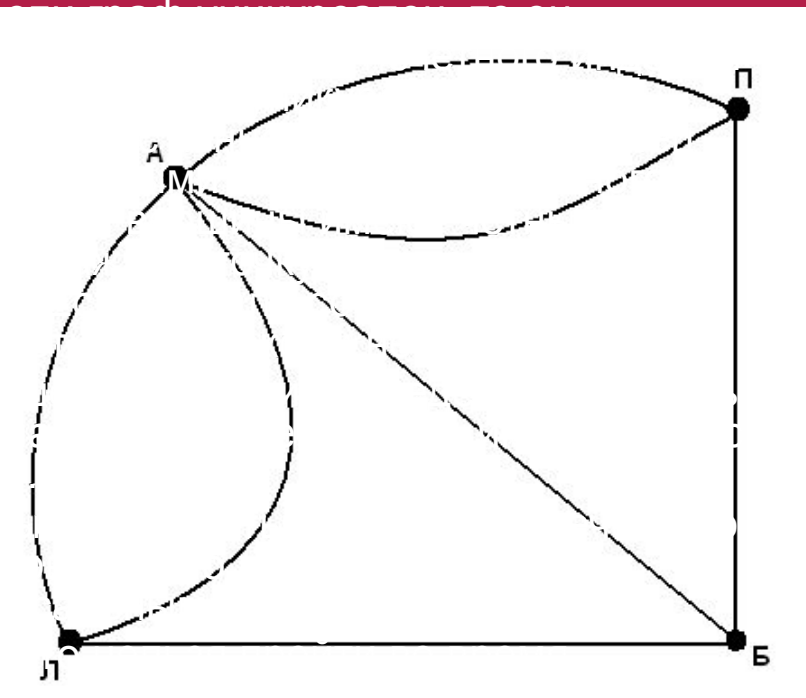
- Для этого, используя понятие индекса вершины,

докажем, что он не содержит не более двух вершин с нечетным индексом. Действительно, если бы было иначе, то начало и конец любой цепи не совпадали бы, следовательно, не являются единичными. Следовательно, индекс каждой вершины четный. Остается доказать, что индекс каждой вершины четный, так как сумма индексов всех вершин графа четна. Выходим из него, что индекс каждой вершины четный, то вершин с нечетным индексом не более двух.

- Приступим к решению задачи. Рассмотрим граф с вершинами А, Б, П, Л. Индексы вершин: А- 5, Б- 3, П- 3, Л- 3.

Таким образом, мы видим, что индекс каждой вершины нечетный, следовательно, граф не является уникурсальным.

Отсюда получаем, что не существует замкнутой прогулки по городу Кенигсбергу по всем семи мостам, проходя по каждому один раз.



# Заключение

- Ознакомившись с теоремой Эйлера и ее приложениями мы выяснили топологическую сущность эйлеровой характеристики и ее роль в классификации поверхностей.
- Восхищаясь творчеством Леонарда Эйлера мы с уверенностью можем сказать, что он внес неоценимый вклад в развитие математики. Нет, пожалуй, ни одной значительной области математики, в которой не оставил бы след один из величайших математиков всех времен и народов, гений XVIII в. Леонард Эйлер.

Используемая литература

# Литература

1. Курант Р., Роббинс Г. «Что такое математика?». (М.: ОГИЗ, 1947.664с.)
2. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. «Наглядная топология». (М.: Наука, 1982.149с.)
3. Борисович Ю.Г. И др. «Введение в топологию». (М.: Высш. Шк., 1980.296с.)
4. Шашкин Ю.А. «Эйлерова характеристика». (М.: Наука, 1984.96с.)
5. Бекламов Б.В. «Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам. (Квант, 1974,- № 10.)
6. Березина Л.Ю. «графы и их применение». (М.: Просвещение.- 1979.)