Теорема (формула дополнения для гамма-функции):

при $x \in R \backslash Z \qquad \Gamma(1-x) * \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Следствие (интеграл Эйлера-Пуассона):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Определение (второй интеграл Эйлера):

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt\,, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0.$$

Утверждение:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \mathrm{B}(\beta, \alpha)$$

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p}B(p, q) - \frac{q}{p}B(p, q+1)$$

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q}B(p, q)$$

Теорема (связь бета и гамма-функций):

при $\alpha > 0, \qquad \beta > 0 \quad \mathrm{B}(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha) * \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$

Пример:

Вычислим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mathrm{a}} x \cos^{\mathrm{b}} x\, dx.$

Теорема (формула Стирлинга):

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right), \qquad |\alpha| < 1$$