

Лекция № 8.

1. Применение формулы Гаусса-Остроградского.
2. Три формулы Грина.
3. Основная теорема векторного анализа. Теорема Гельмгольца.

Вывод уравнения неразрывности.

Формула Гаусса - Остроградского

$$\iint_{\Omega^+ = \partial V} P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

для гладкого векторного поля $\vec{a} = (P; Q; R)$

примет вид:
$$\iint_{\Omega^+ = \partial V} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\Omega = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

В качестве применения формулы Гаусса - Остроградского рассмотрим вывод одного из основных уравнений движения жидкости – *уравнения неразрывности*

Пусть a – поле скоростей движущейся жидкости в некоторой области V с границей $\Omega = \partial V$.

Предположим, что жидкость не исчезает, не возникает и является сжимаемой, т.е. её плотность $\rho(x, y, z, t)$.

Выясним, как связана скорость движения жидкости с изменением плотности. Для этого подсчитаем двумя способами изменение ΔV количества жидкости внутри объёма за время Δt .

Очевидно, что
$$\Delta V = \Delta t \cdot \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

С другой стороны, изменение количества жидкости внутри объёма V равно потоку жидкости через поверхность ∂V , умноженному на Δt , т. е.

$$\Delta V = -\Delta t \cdot \iint_{\Omega=\partial V} (\rho \cdot \vec{a}, \vec{n}) d\Omega,$$

где \vec{n} – наружная нормаль, а знак минус берется потому, что если скорость направлена наружу, то количество жидкости в объёме уменьшается.

Согласно формуле Гаусса - Остроградского имеем

$$\Delta V = -\Delta t \cdot \iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{a}) dV$$

Следовательно,

$$- \Delta t \cdot \iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{a}) dV = \Delta t \cdot \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Отсюда,

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{a}) dV$$

Итак,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{a}) \right) dV = 0, \quad \forall V \subset \mathbb{R}^3$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{a}) = 0,$$

где $\rho \cdot \vec{a}$ — называют плотностью потока жидкости
Итак, мы получили уравнение, связывающее между собой скорость и плотность движущейся жидкости при отсутствии источников и стоков.

Это, так называемое, ***уравнение неразрывности.***

Первая и вторая формулы Грина.

Пусть φ, ψ – две скалярные гладкие функции точки.

Составим вектор $\vec{a} = \varphi \cdot \text{grad} \psi = \varphi \cdot \nabla \psi$.

Тогда

$$\text{div} \vec{a} = (\nabla, \varphi \cdot \nabla \psi) = (\nabla \varphi, \nabla \psi) + \varphi \cdot \nabla^2 \psi$$

Или

$$\text{div} \vec{a} = (\nabla \varphi, \nabla \psi) + \varphi \cdot \Delta \psi = \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi + \varphi \cdot \Delta \psi$$

В силу формулы Гаусса - Остроградского:

$$\iint_{\Omega^+ = \partial V} (\vec{a} \cdot \vec{n}) d\Omega = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

Но $\vec{a} \cdot \vec{n} = (\varphi \cdot \operatorname{grad} \psi, \vec{n}) = \varphi \cdot (\operatorname{grad} \psi, \vec{n}) = \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}$

В результате получим *первую формулу Грина*:

$$\iint_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Omega = \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \varphi \cdot \Delta \psi) dV$$

Другая запись *предварительной формулы Грина*:

$$\iiint_V \varphi \cdot \Delta \psi \, dV = \iint_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Omega - \iiint_V (\text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi) \, dV$$

Выведем вторую формулу Грина. Имеем:

$$\iint_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Omega = \iiint_V (\text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi + \varphi \cdot \Delta \psi) \, dV$$

Меняя местами φ и ψ , получим:

$$\iint_{\partial V} \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\Omega = \iiint_V (\text{grad} \psi \cdot \text{grad} \varphi + \psi \cdot \Delta \varphi) \, dV$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$\oiint_{\partial V} \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Omega = \iiint_V (\varphi \cdot \Delta \psi - \psi \cdot \Delta \varphi) dV$$

Или, по-другому

$$\iiint_V (\varphi \cdot \Delta \psi - \psi \cdot \Delta \varphi) dV = \oiint_{\substack{\Omega^+ = \partial V \\ \rightarrow}} \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Omega$$

Это **вторая формула Грина**. \vec{n} – вектор внешней нормали к кусочно-гладкой поверхности $\Omega = \partial V$

Или удобная запись в форме определителя:

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \Delta\varphi & \Delta\psi \end{vmatrix} dV = \iint_{\Omega^+ = \partial V} \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} & \frac{\partial\psi}{\partial n} \end{vmatrix} d\Omega$$

Пусть $\Delta\varphi = 0$, $\psi \equiv 1$. Тогда

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \varphi & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} dV = \iint_{\Omega^+ = \partial V} \begin{vmatrix} \varphi & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} & 0 \end{vmatrix} d\Omega \Rightarrow \iint_{\Omega^+} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Omega = 0$$

Это одно из свойств гармонических ($\Delta\varphi = 0$) функций.

Если в первой формуле Грина положить $\varphi \equiv 1$, то

$$\iiint_V \Delta \psi \, dV = \iint_{\Omega^+ = \partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Omega$$

Это ещё одна полезная формула.

Полагая в первой формуле Грина $\varphi = \psi$, получим
третью формулу Грина

$$\iiint_V \{(\operatorname{grad} \varphi)^2 + \varphi \cdot \Delta \varphi\} dV = \iint_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega$$

Отсюда следует неравенство

$$\iiint_V \{\varphi \cdot \Delta \varphi\} dV \leq \iint_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega$$

Теорема Гельмгольца (о разложении векторного поля)

Произвольное векторное поле \vec{A} , заданное в \mathbb{R}^3 всегда можно представить в виде суммы *потенциального* поля \vec{P} и *соленоидального* поля \vec{S} .

$$\vec{A} = \vec{P} + \vec{S}.$$

Так что $\operatorname{rot} \vec{P} = 0$ и $\operatorname{div} \vec{S} = 0$.

Положим, $\vec{P} = \text{grad } \Phi$, где Φ – некая скалярная функция.

Тогда автоматически, $\text{rot } \vec{P} = \text{rot grad } \Phi = 0$.

Следовательно, $\vec{S} = \vec{A} - \text{grad } \Phi$.

Так что $\text{div } \vec{S} = \text{div} (\vec{A} - \text{grad } \Phi) = \text{div } \vec{A} - \text{div grad } \Phi = 0$.

Но $\text{div grad } \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi$

–определенный ранее *оператор Лапласа*

Таким образом, для определения неизвестной скалярной функции Φ получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

(которое всегда имеет решение, даже бесконечное множество)

$$\Delta\Phi = \operatorname{div} \vec{A}$$

Можно показать, что
$$\Phi(\vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} \vec{A}}{|\vec{r} - \vec{R}|} dx dy dz,$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ – переменный радиус-вектор интегрирования,

$|\vec{r} - \vec{R}|$ – расстояние от текущей точки \vec{r} до точки \vec{R} ,

в которой определяется скалярное поле Φ .

При условии, что $\operatorname{div} \vec{A}$ стремится к нулю на бесконечности.



***СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ
И
ПОНИМАНИЕ !***