Лекция № 8.

1. Применение формулы Гаусса-Остроградского.

2. Три формулы Грина.

3. Основная теорема векторного анализа. Теорема Гельмгольца.

Вывод уравнения неразрывности.

Формула Гаусса - Остроградского

$$\oiint\limits_{\Omega^+=\partial V} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

для гладкого векторного поля $\vec{a} = (P; Q; R)$

примет вид: $$\oiint\limits_{\Omega^+=\partial V} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,d\Omega = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV$$

В качестве применения формулы Гаусса - Остроградского рассмотрим вывод одного из основных уравнений движения жидкости – ***уравнения неразрывности***

Пусть $\vec{a}$ – поле скоростей движущейся жидкости в некоторой области V с границей $\Omega = \partial V$.

Предположим, что жидкость не исчезает, не возникает и является сжимаемаемой, т.е. её плотность $\rho(x, y, z, t)$.

Выясним, как связана скорость движения жидкости с изменением плотности. Для этого подсчитаем двумя способами изменение ΔV количества жидкостивнутри объёма за время Δt.

Очевидно, что $$\Delta V = \Delta t \cdot \iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

С другой стороны, изменение количества жидкости внутри объёма V равно потоку жидкости через поверхность ∂V, умноженному на Δt, т. е.

$$\Delta V = -\Delta t \cdot \iint\limits_{\Omega=\partial V} (\rho \cdot \vec{a}, \vec{n})\, d\Omega,$$

где $\vec{n}$ – наружная нормаль, а знак минус берется потому, что если скорость направлена наружу, то количество жидкости в объёме уменьшается.

Согласно формуле Гаусса - Остроградскогоимеем

$$\Delta V = -\Delta t \cdot \iiint\limits_{V} \mathrm{div}(\rho \cdot \vec{a})\, dV$$

Следовательно,

$$-\Delta t \cdot \iiint\limits_V \operatorname{div}(\rho \cdot \overrightarrow{a})\,dV = \Delta t \cdot \iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV$$

Отсюда,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = -\iiint\limits_V \operatorname{div}(\rho \cdot \overrightarrow{a})\,dV$$

Итак,

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \overrightarrow{a})\right)dV = 0, \quad \forall V \subset \mathbb{R}^3$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\cdot\vec{a})=0,$$

где $\rho\cdot\vec{a}$ – называют плотностью потока жидкости

Итак, мы получили уравнение, связывающеемежду собой скорость и плотность движущейся жидкости при отсутствии источников и стоков.

Это, так называемое, ***уравнение неразрывности.***

Первая и вторая формулы Грина.

Пусть φ, ψ – две скалярные гладкие функции точки.

Составим вектор $\vec{a} = \varphi \cdot \operatorname{grad}\psi = \varphi \cdot \nabla\psi$.

Тогда

$$\operatorname{div}\vec{a} = (\nabla, \varphi \cdot \nabla\psi) = (\nabla\varphi, \nabla\psi) + \varphi \cdot \nabla^2\psi$$

Или

$$\operatorname{div}\vec{a} = (\nabla\varphi, \nabla\psi) + \varphi \cdot \Delta\psi = \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi + \varphi \cdot \Delta\psi$$

В силу формулы Гаусса - Остроградского:

$$\oiint\limits_{\Omega^{+}=\partial V} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,d\Omega = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{a}\,dV$$

Но $\quad \vec{a}\cdot\vec{n} = (\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi, \vec{n}) = \varphi\cdot(\operatorname{grad}\psi, \vec{n}) = \varphi\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$

В результате получим ***первую формулу Грина***:

$$\oiint\limits_{\partial V} \varphi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\Omega = \iiint\limits_{V} \left(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi + \varphi\cdot\Delta\psi\right)dV$$

Другая запись ***предварительной формулы Грина***:

$$\iiint\limits_V \varphi \cdot \Delta\psi \, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Omega - \iiint\limits_V \left(\mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{grad}\psi\right) dV$$

Выведем вторую формулу Грина. Имеем:

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Omega = \iiint\limits_V \left(\mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{grad}\psi + \varphi \cdot \Delta\psi\right) dV$$

Меняя местами φ и ψ, получим:

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega = \iiint\limits_V \left(\mathrm{grad}\psi \cdot \mathrm{grad}\varphi + \psi \cdot \Delta\varphi\right) dV$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$\oiint_{\partial V} \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Omega = \iiint_V \left(\varphi \cdot \Delta\psi - \psi \cdot \Delta\varphi \right) dV$$

Или, по-другому

$$\iiint_V \left(\varphi \cdot \Delta\psi - \psi \cdot \Delta\varphi \right) dV = \oiint_{\Omega^+ = \partial V} \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Omega$$

Это ***вторая формула Грина***. $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к кусочно-гладкой поверхности $\Omega = \partial V$

Или удобная запись в форме определителя:

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \Delta\varphi & \Delta\psi \end{vmatrix} dV = \oiint\limits_{\Omega^+ = \partial V} \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} & \dfrac{\partial\psi}{\partial n} \end{vmatrix} d\Omega$$

Пусть $\Delta\varphi = 0, \psi \equiv 1.$ Тогда

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \varphi & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} dV = \oiint\limits_{\Omega^+ = \partial V} \begin{vmatrix} \varphi & 1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} & 0 \end{vmatrix} d\Omega \Rightarrow \oiint\limits_{\Omega^+} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Omega = 0$$

Это одно из свойств гармонических $(\Delta\varphi = 0)$ функций.

Если в первой формуле Грина положить $\varphi \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_V \Delta\psi \, dV = \oiint\limits_{\Omega^+ = \partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Omega$$

Это ещё одна полезная формула.

Полагая в первой формуле Грина $\varphi = \psi$, получим ***третью формулу Грина***

$$\iiint_V \left\{ (\mathrm{grad}\varphi)^2 + \varphi \cdot \Delta\varphi \right\} dV = \oiint_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega$$

Отсюда следует неравенство

$$\iiint_V \left\{ \varphi \cdot \Delta\varphi \right\} dV \le \oiint_{\partial V} \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega$$

Теорема Гельмгольца
(о разложении векторного поля)

Произвольное векторное поле $\vec{A}$, заданное в $\mathbb{R}^3$ всегда можно представить в виде суммы *потенциального* поля $\vec{P}$ и *соленоидального* поля $\vec{S}$.

$$\vec{A} = \vec{P} + \vec{S}.$$

Так что $\operatorname{rot} \vec{P} = 0$ и $\operatorname{div} \vec{S} = 0.$

Положим, $\vec{P} = \operatorname{grad}\Phi$, где Φ – некая скалярная функция.

Тогда автоматически, $\operatorname{rot}\vec{P} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = 0.$

Следовательно, $\vec{S} = \vec{A} - \operatorname{grad}\Phi.$

Так что $\operatorname{div}\vec{S} = \operatorname{div}\left(\vec{A} - \operatorname{grad}\Phi\right) = \operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = 0.$

Но $\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi$

–определенный ранее ***оператор Лапласа***

Таким образом, для определения неизвестной скалярной функции Ф получаем дифференциальное уравнение *в частных производных второго порядка* (которое всегда имеет решение, даже бесконечное множество)

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \vec{A}$$

Можно показать, что $\Phi(\vec{R}) = -\dfrac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\operatorname{div}\vec{A}}{\left|\vec{r}-\vec{R}\right|}\,dx\,dy\,dz$,

где $\vec{r} = (x, y, z)$ – переменный радиус-вектор интегрирования,

$\left|\vec{r}-\vec{R}\right|$ – расстояние от текущей точки $\vec{r}$ до точки $\vec{R}$,

в которой определяется скалярное поле Φ.

При условии, что $\operatorname{div}\vec{A}$ стремится к нулю на бесконечности.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ
И
ПОНИМАНИЕ !