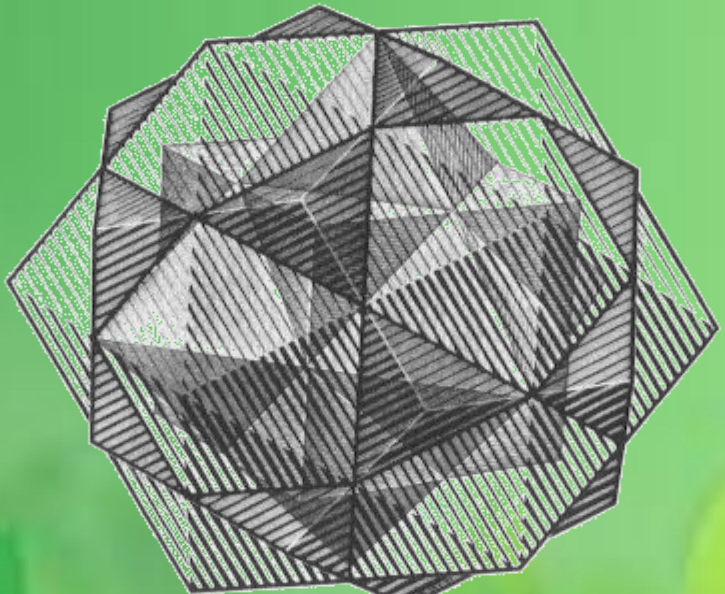
Теорема Минковского о многогранниках



Выполнила
ст. гр. 4219-1
Прожуган Яна

Теорема, о которой пойдет речь, наряду со знаменитыми теоремами Эйлера, Коши, Александрова, принадлежит к числу наиболее удивительных и глубоких результатов о многогранниках.

- **Эта теорема была доказана в 1897 году выдающимся немецким математиком Германом Минковским (1864-1909).**

Выпуклые многогранники и их «ежи»

Под выпуклым многогранником будем понимать пространственное тело, являющееся пересечением конечного числа полупространств.

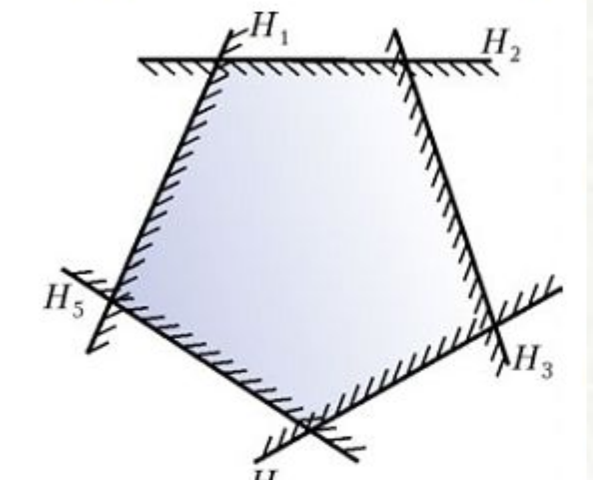


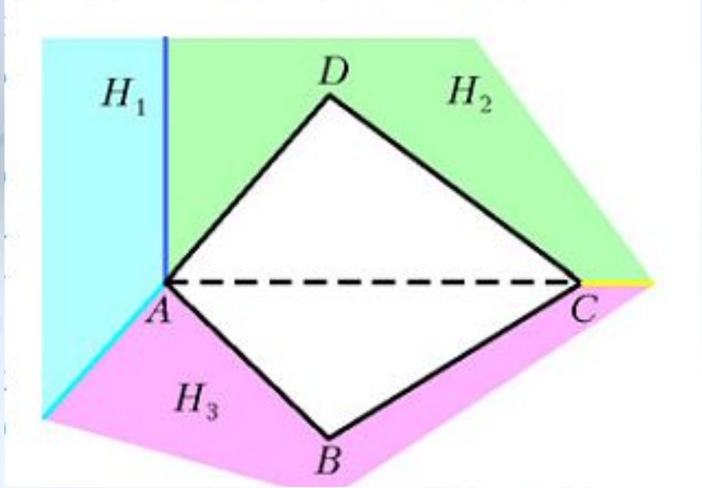
Рис. 1

Введем важное понятие опорной плоскости.

Плоскость, имеющая с данным многоранником общие точки, но оставляющая многогранник по одну от себя сторону, называется опорной

Так как многогранник выпуклый, каждая опорная плоскость содержит:

- либо единственную точку многогранника – вершину;
- либо целый отрезок многогранника – его ребро;
- либо целый многоугольник, называемый гранью.



Теорема Минковского

Предположим, что дана система векторов в

трехмерном пространстве с нулевой сумой.

Является ли она ежом какого-нибудь многогранника?

Удивительная теорема Минковского утверждает,

что да, является.

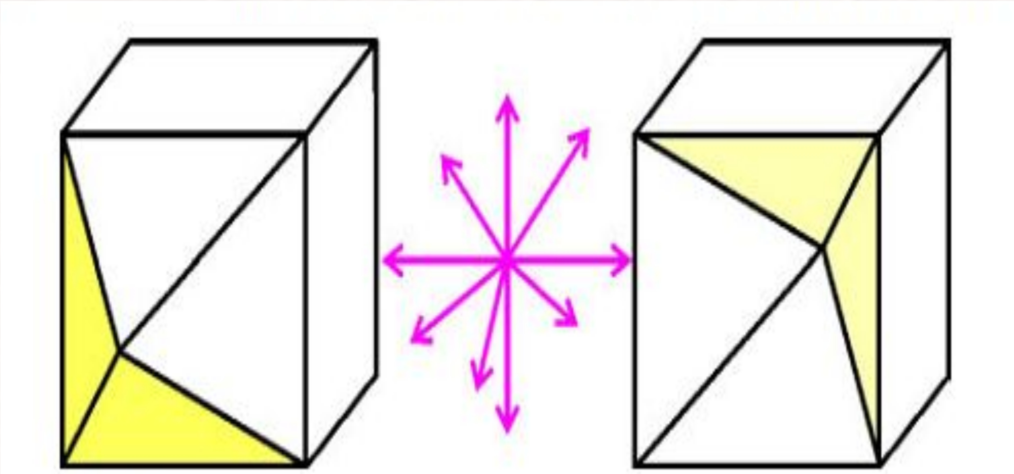
$\sum_{i} \overline{F}i = 0$

Теорема 1: (Г.Минковский).

Пусть {Fi} - множество векторов в пространстве, отложенных от одной точки, такое, что оно не лежит в одной плоскости. Тогда существует ограниченный многогранник P, еж которого есть множество векторов. Более того, многогранник P определен однозначно с точностью до параллельного переноса.

Для единственности многогранника условие выпуклости существенно.

Доказательство, данное Минковским, опирается на известный из Лагранжа. Другое доказательство было дано выдающимся росийским геометром А.Д. Александровым(1912-1999).



Теорема Минковского (точнее, ее аналог) верна для многогранников любой размерности. Для случая плоских многоугольников она доказывается несложно.

Центрально-симметричные многогранники

Теорема Минковского чрезвычайно продуктивна. С ее помощью доказывается ряд теорем:

Теорема 2: **Если еж многогранника Р центрально-симметричен, то многогранник Р также центрально-симметричен.**

Теорема 3: Выпуклый многогранник P тогда и только тогда центрально-симметричен, когда у каждой грани имеется параллельная грань той же площади.

Теорема 4: Если выпуклый многогранник P составлен из конечного числа центрально-симметричных многогранников P1, P2,….,Pк, то и сам многогранник P центрально-симметричен.

Многогранники с центрально-симметричными гранями

Грани у центрально-симметричного многогранника не обязательно симметричны. Например, у октаэдра, который является центрально-симметричным многогранником, все грани – треугольники. Так что симметричность граней не является необходимым условием центрально-симметричного многогранника. Но является ли она достаточным условием? Оказывается да, является.

Теорема 5: (А.Д.Александров).

Если все грани выпуклого многогранника Р центрально-симметричны, то и сам многогранник Р центрально-симметричный.

Доказательство теоремы Александрова также опирается на теорему Минковского.