ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Теорема

- Если каждый из сомножителей произведения конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то предел произведения при $x \to a$ равен произведению пределов сомножителей.

Доказательство

1. Рассмотрим сначала произведение двух сомножителей $f(x)g(x)$, и пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = B$$

Имеем

$$f(x) = A + \alpha(x), g(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$. Отсюда получаем

$$f(x)g(x) = AB + \gamma(x),$$

где

$$\gamma(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

Из основных теорем о бесконечно малых следует, что $\gamma(x) \to 0$ при $x \to a$.

Поэтому на основании равенства $f(x)g(x) = AB + \gamma(x)$ будем иметь

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = AB = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$

2. Рассмотрим теперь, например, произведение трех функций $f(x)g(x)h(x)$, имеющих конечные пределы при $x \to a$. Используя первую часть доказательства, находим

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)h(x)] = \lim_{x\to a}\{f(x)[g(x)h(x)]\} =$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a}[g(x)h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) \lim_{x\to a} h(x).$$