

Теорема (признак Дини):

Пусть $f(x)$ — 2π — периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \text{ и пусть в}$$

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt,$

$$\text{то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

Примеры:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ \frac{-\pi - x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2) f(x) = |x| \text{ на } [-\pi, \pi]$$

Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических.

Определение:

Пусть $f(x)$ определена на $[-\pi, \pi]$ и ей можно поставить в соответствие её ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,

$$\text{пусть } S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\text{а } D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \text{ядра Дирихле.}$$

$\sigma_{n+1}(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$ называется последовательностью Фейера, соответствующей $f(x)$,

и $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n D_k(x)$ называется ядром Фейера

Лемма (свойства ядра Фейера):

$$1) F_{n+1}(x) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{2(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$2) F_n(x) \geq 0 \quad \forall n$$

$$3) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 1$$

$$4) \forall \delta \in (0, \pi) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} F_n(x) dx = 0$$

Теорема (признак Дини):

Пусть $f(x)$ — 2π — периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \text{ и пусть в}$$

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt,$

$$\text{то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

Примеры:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ \frac{-\pi - x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2) f(x) = |x| \text{ на } [-\pi, \pi]$$

Если $\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Фурье $f(x)$, то $\check{f}(x)$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$ называется обратным
преобразованием Фурье.

Лемма:

$\forall f(x)$, удовлетворяющей условиям из предыдущего
определения, $\hat{f}(\lambda) \in C(R)$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |\hat{f}(\lambda)| = 0$.

Теорема:

Пусть $f(x)$ удовлетворяет всем условиям определения из начала лекции и пусть в точке x_0

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0) \text{ и } \exists \delta > 0, \text{ что}$$

$$\exists \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|}{t} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A \hat{f}(x) e^{i\lambda x_0} d\lambda \right) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Следствие:

Если $f(x) \in C(\mathbb{R})$ и удовлетворяет всем условиям

теоремы и кроме того существует $\check{f}(x)$, то

$$\check{f}(x) \equiv f(x).$$