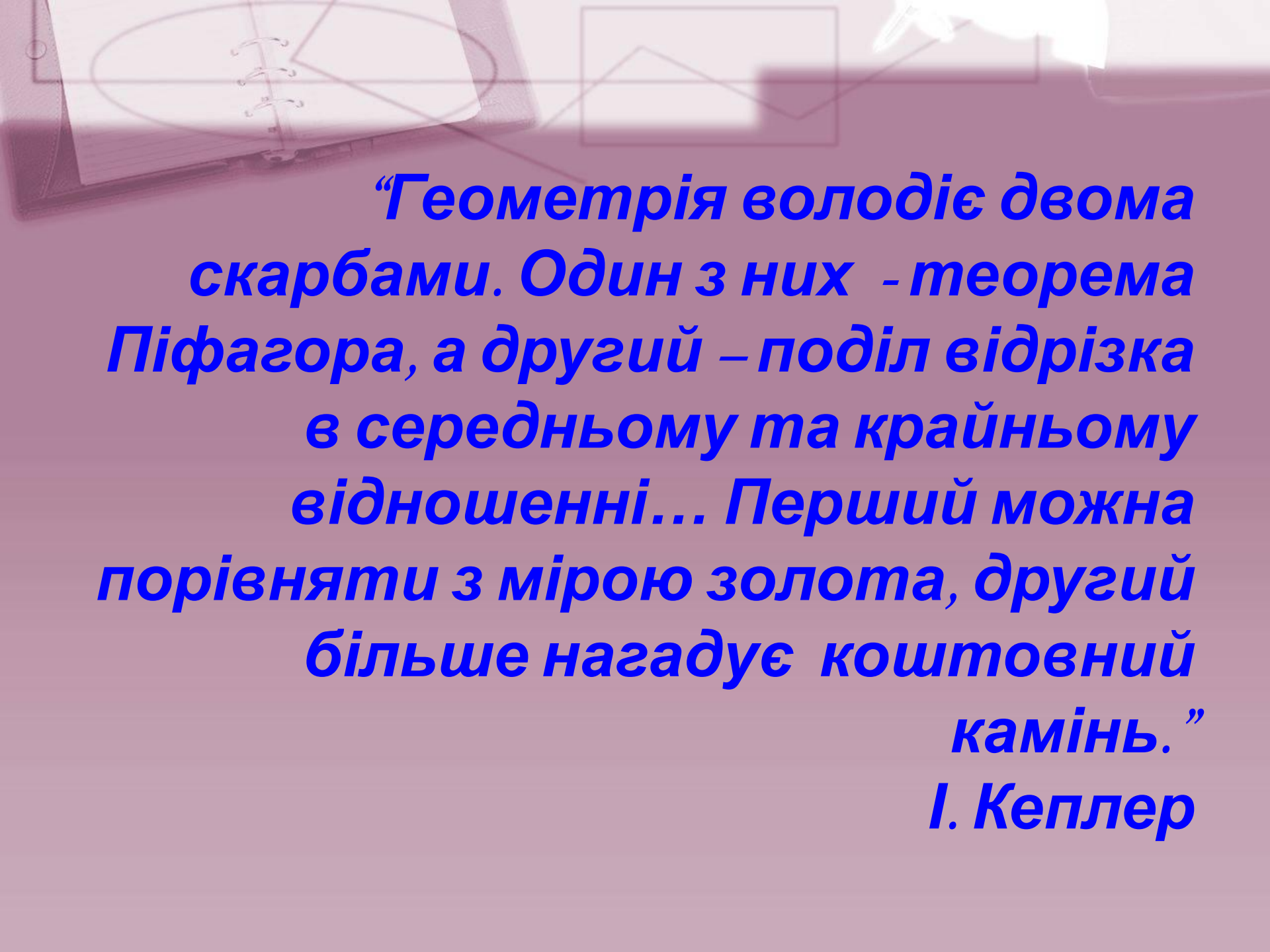




Теорема Піфагора

*Робота учениці 10-Б класу ЗНЗ № 29
Петрусевич Ірини*



“Геометрія володіє двома скарбами. Один з них - теорема Піфагора, а другий – поділ відрізка в середньому та крайньому відношенні... Перший можна порівняти з мірою золота, другий більше нагадує коштовний камінь.”

I. Кеплер

Зміст

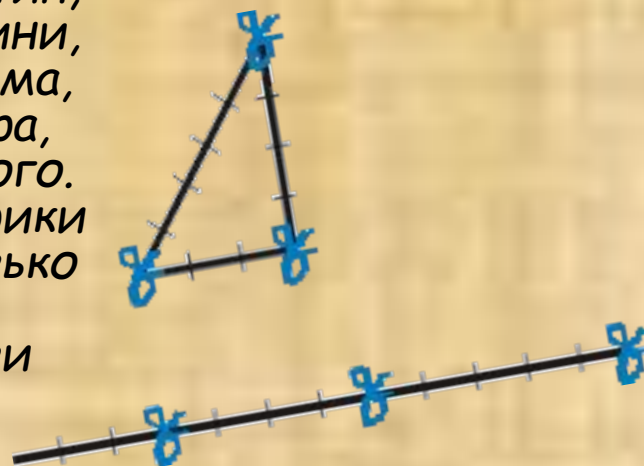
1. З найдавніших часів.
2. Піфагор та його школа.
3. Різні доведення теореми Піфагора:
 - ✓ метод розкладання на рівновеликі площі;
 - ✓ метод доповнення;
 - ✓ алгебраїчні доведення;
 - ✓ метод подібності;
 - ✓ векторний метод.
4. Узагальнення теореми Піфагора.
5. Застосування теореми Піфагора.
6. Тестові завдання.
7. Цікаві задачі

Зміст

З найдавніших часів

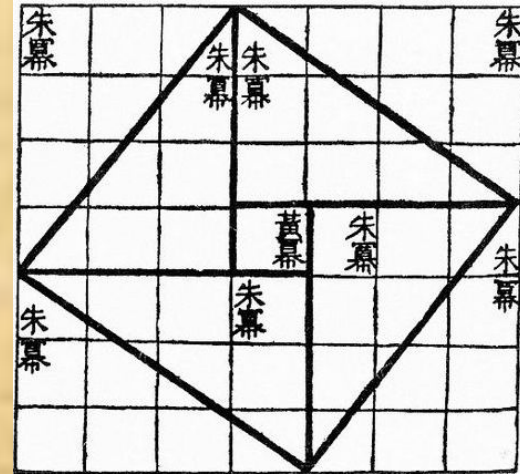
Історія теореми Піфагора починається набагато раніше до Піфагора. Відомості про неї говорять про те, що Піфагор навчався математиці у єгипетських жреців. Рівність $3^2 + 4^2 = 5^2$ була відома єгиптянам ще біля 2300 року до н.е. в часи царя Аменемхета I.

Єгипетські гарпедонапти - землеміри - використовували мотузку, поділену на 12 рівних частин. Якщо з неї скласти трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 частин, то кут між сторонами по 3 і 4 частини, буде прямим. Таким чином, теорема, яку ми називаємо іменем Піфагора, була відома набагато раніше до нього. У вавилонянських текстах, які історики відносять до часів Хаммурабі (близько 2000 року до н.е.) наводиться наближене обчислення гіпотенузи прямокутного трикутника.



З найдавніших часів

В математичній книзі Чу-пей у давньому Китаї так говориться про трикутник зі сторонами 3, 4 і 5: "Якщо прямиий кут розкласти на складові частини, то лінія, яка сполучає кінці його сторін, буде 5, тоді основа є 3, а висота 4". В цій же книзі подано малюнок, якій співпадає з одним із креслень індуської геометрії Басхари.

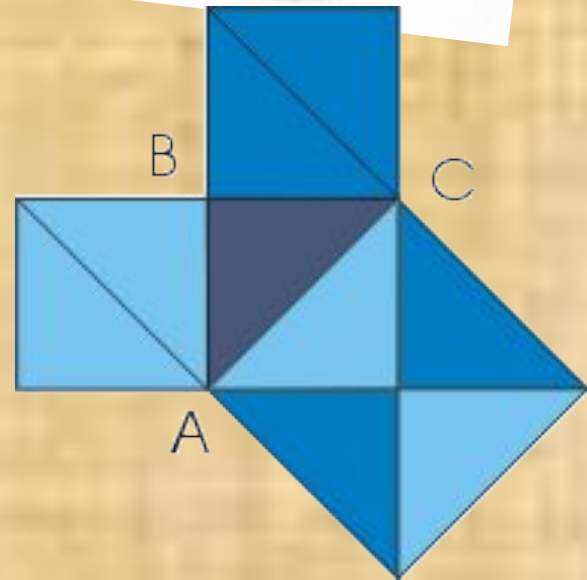
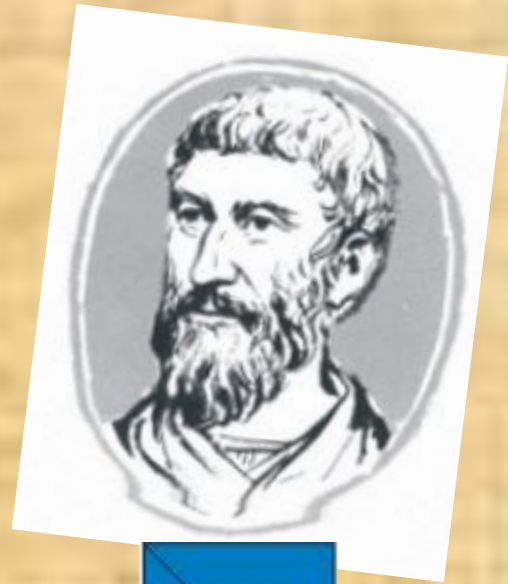


Геометрія в індусів була тісно пов'язана з культом. Майже достовірно відомо, що теорема про квадрат гіпотенузи була відома в Індії вже біля 18 століття до н.е. Про це свідчить запис, який міститься в "Сутрах": "Квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів його більшої та меншої сторін. Квадрат, побудований на діагоналі, вдвічі більше самого квадрата"

З найдавніших часів

Зараз всі погоджуються з тим, що ця теорема не була відкрита Піфагором, проте, дехто вважає, що Піфагор перший дав її повноцінне доведення.

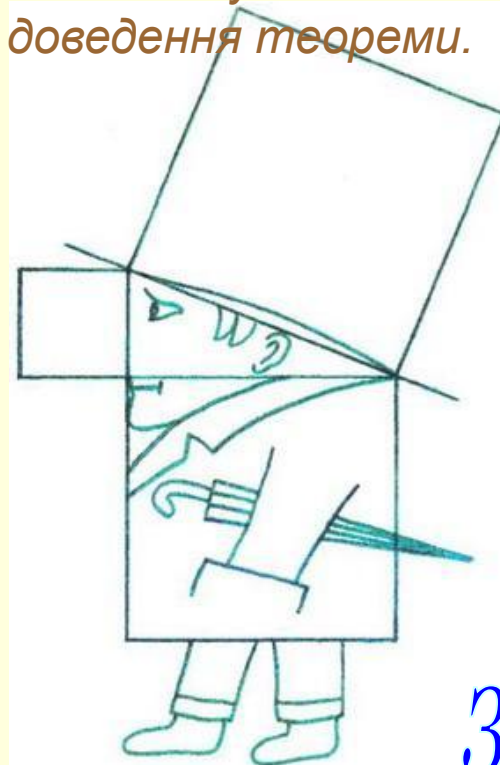
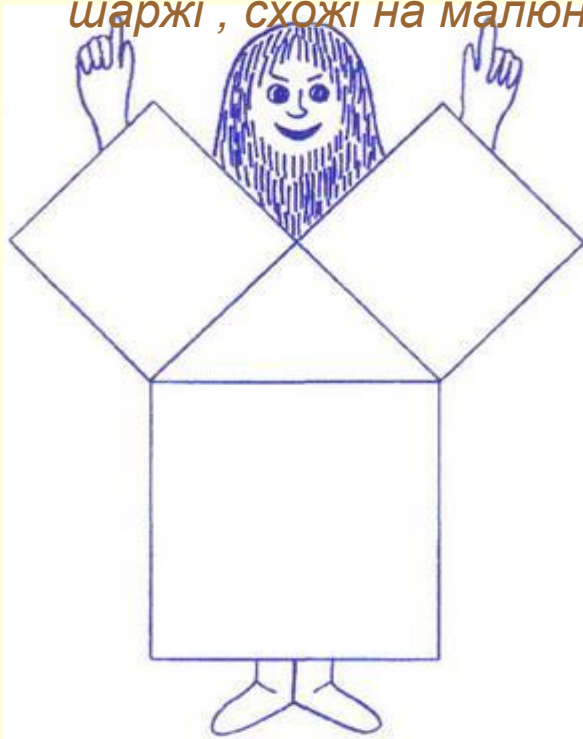
За словами голландського математика Ван-дер-Вадена, заслугою перших грецьких математиків, таких як Фалес, Піфагор та піфагорійці, є не відкриття математики, проте її систематизація та обґрунтування. В їх руках обчислювальні рецепти, засновані на смутних уявленнях, перетворилися в точну науку." Найпростіше її доведення можна побачити на малюнку.



“Віслюків міст”

В найдавніші часи доведення теореми Піфагора вважалося дуже складним і опанувати його могли далеко не всі учні.

Тому учні, які не мали достатньої математичної підготовки, виучували доведення на пам'ять без розуміння його. Їх прозвали “віслюками”, для яких ця теорема була нездоланим містком. Дуже багато хто з учнів малював шаржі, схожі на малюнки для доведення теореми.



Зміст

Піфагор Самоський

В VI столітті до н.е. у сім'ї золотих справ майстра Мнесарха народився син. У легенді нічого не сказано про рік народження Піфагора; історичні дослідження датують його появу на світ приблизно 580 роком до нашої ери на острові Самос.

Можливості дати сину гарну освіту та виховання у Мнесарха були. Майбутній математик та філософ вже в дитинстві виявив велику здатність до наук. У свого першого вчителя Гермодамаса Піфагор отримує знання основ музики та живопису.



Піфагор та його школа



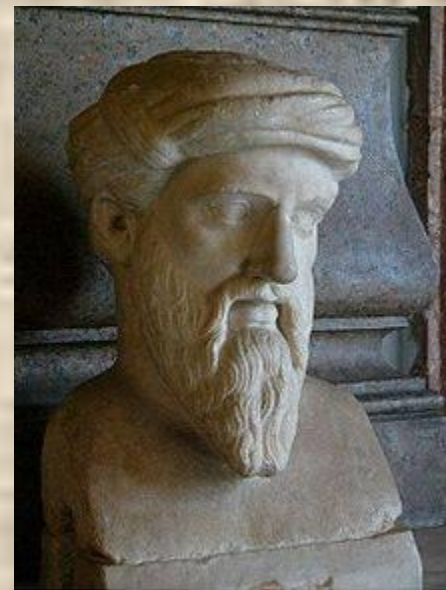
Пройшло кілька років, і за порадою свого вчителя Піфагор вирішує продовжити навчання в Єгипті, у жреців. Там відбувається знайомство Піфагора з філософом Ферекидом - другом Фалеса. У Ферекида Піфагор навчається астрології, таємницям чисел, медицині та іншим обов'язковим на той час наукам. Звідти шлях Піфагора лежить у Мілет до відомого Фалеса, засновника першої в історії філософської школи. Навчання Піфагора в Єгипті сприяє тому, що він стає одним із найбільш освічених людей свого часу.

Піфагор та його школа

До цього періоду відноситься подія, яка змінила все його майбутнє життя. Помер фараон Амазіс. Піддалися гонінням і жреці: їх вбивали або брали в полон. Так потрапив у персидський полон і Піфагор.

Дванадцять років знаходився у вавилонському полоні Піфагор, доки його не звільнив персидський цар Дарій Гістасп, який прочув про відомого грека. Піфагору вже 60, він вирішує повернутися батьківщину. Тут і вирішує Піфагор створити власну філософську школу. Це був одночасно і релігійний союз, і політичний клуб, і наукове товариство. Учні цієї школи зобов'язувались вести так званий піфагорійський спосіб життя.

...Пройшло 20 років після створення школи.
Слава про неї рознеслася по всьому світу.



Піфагор та його школа

Заслугою піфагорійців було висування думки про кількісні закономірності розвитку світу, що сприяло розвитку математичних, фізичних, астрономічних і географічних знань. В основі речей лежить число, учив Піфагор, пізнати світ - пізнати числа, що ним правлять.

Вивчаючи числа, вони розробили числові відношення, і знайшли їх у всіх областях людської діяльності. Числа і пропорції вивчалися для того, щоб пізнати і описати душу людини, а пізнавши, керувати процесом переселення душ.



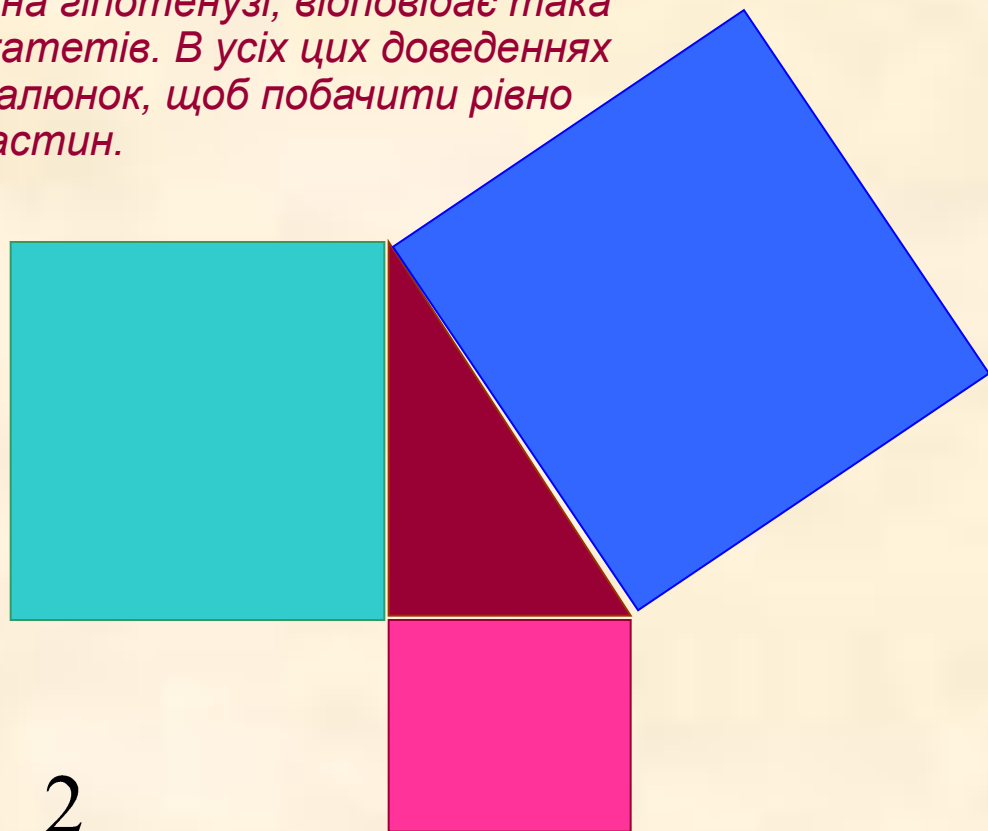
Зміст

Метод розкладання на рівновеликі площі

Існує кілька доведень теореми Піфагора, в яких квадрати, побудовані на катетах і гіпотенузі, поділяють на частини таким чином, що кожній частині квадрата, побудованого на гіпотенузі, відповідає така сама частина, побудована на одному з катетів. В усіх цих доведеннях достатньо одного лише погляду на малюнок, щоб побачити рівно великість цих частин.

Формулювання теореми
Піфагора в давнину:

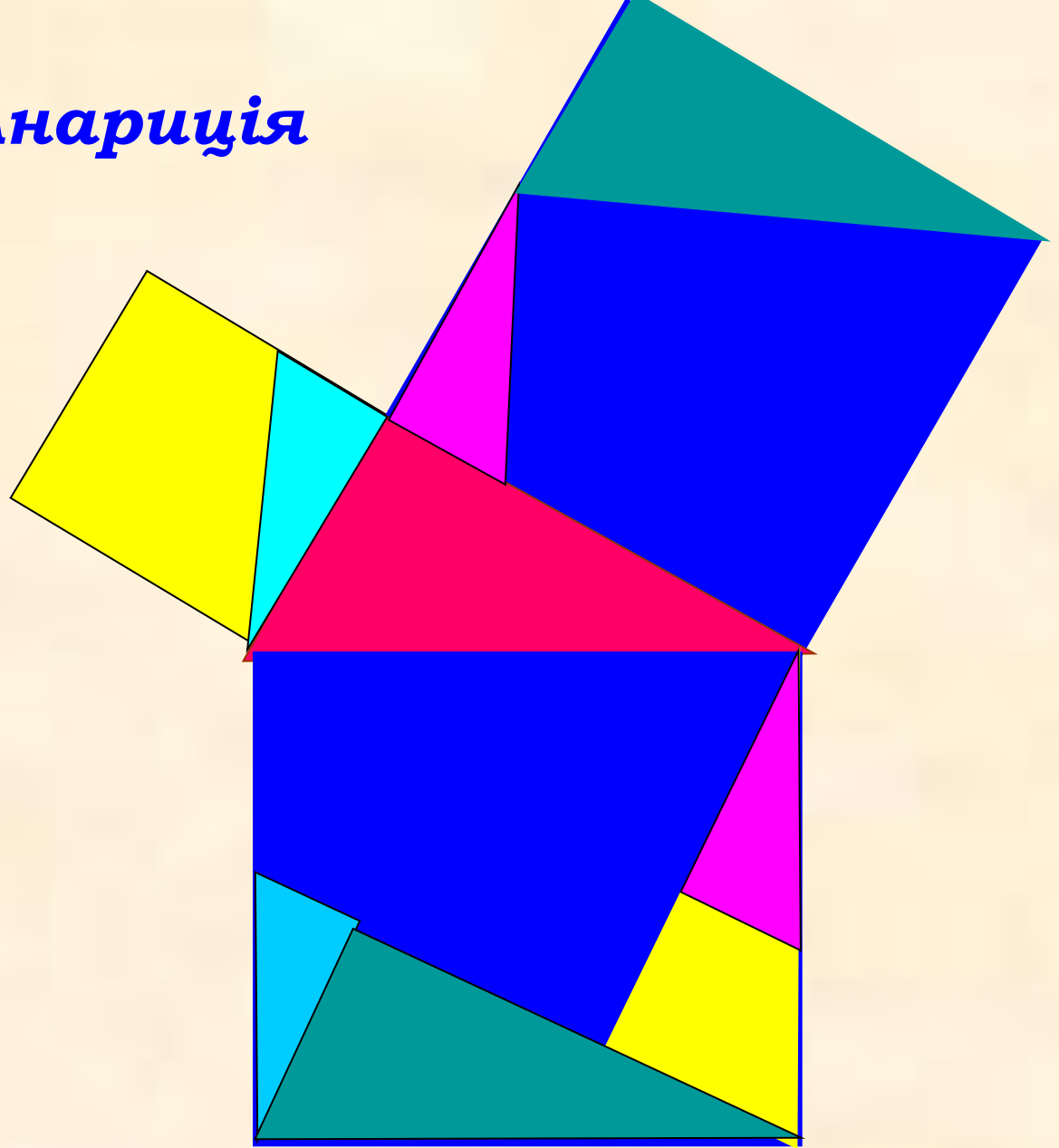
Сума площ квадратів,
побудованих на катетах
прямокутного трикутника,
дорівнює площі квадрата,
побудованого на його
гіпотенузі.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Доведення Анариція

Це доведення
запропонував
багдацький
математик та
астроном X
століття ан-
Найризій
(в перекладі на
латинську –
Анарицій)



Методи розкладання на рівновеликі площі

Доведення Епіштейна

Доведення Перигаля

квадрати, побудовані на гіпотенузі і катетах

прямокутного трикутника

Доведення Гунтхейля

доведення, яке знайшов Перігаль

Для доведення слід визначити місце, що

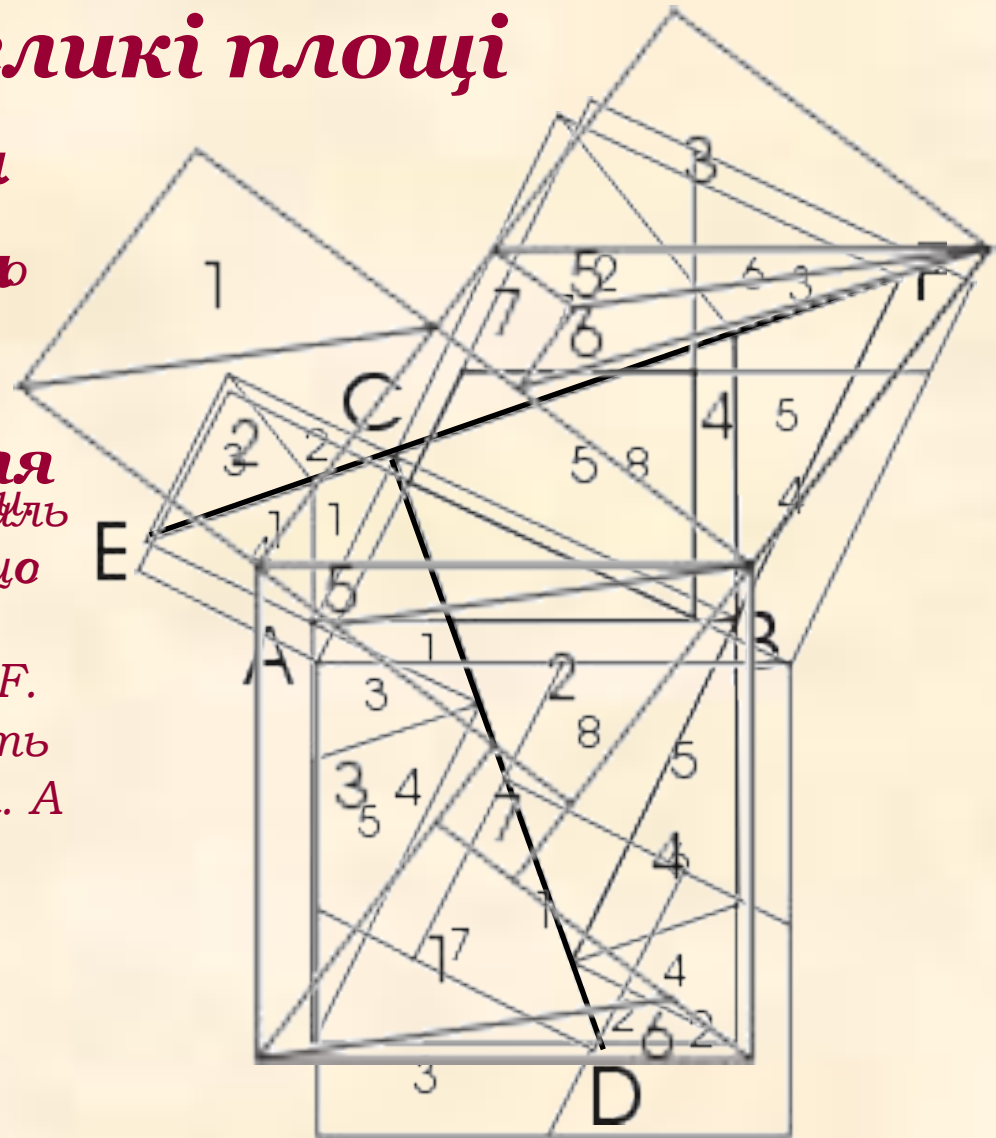
лежить на AD . Невведеться

перпендикуляр до прямої EF .

більшому з катетів, проводять прямі, одна з яких паралельна. А

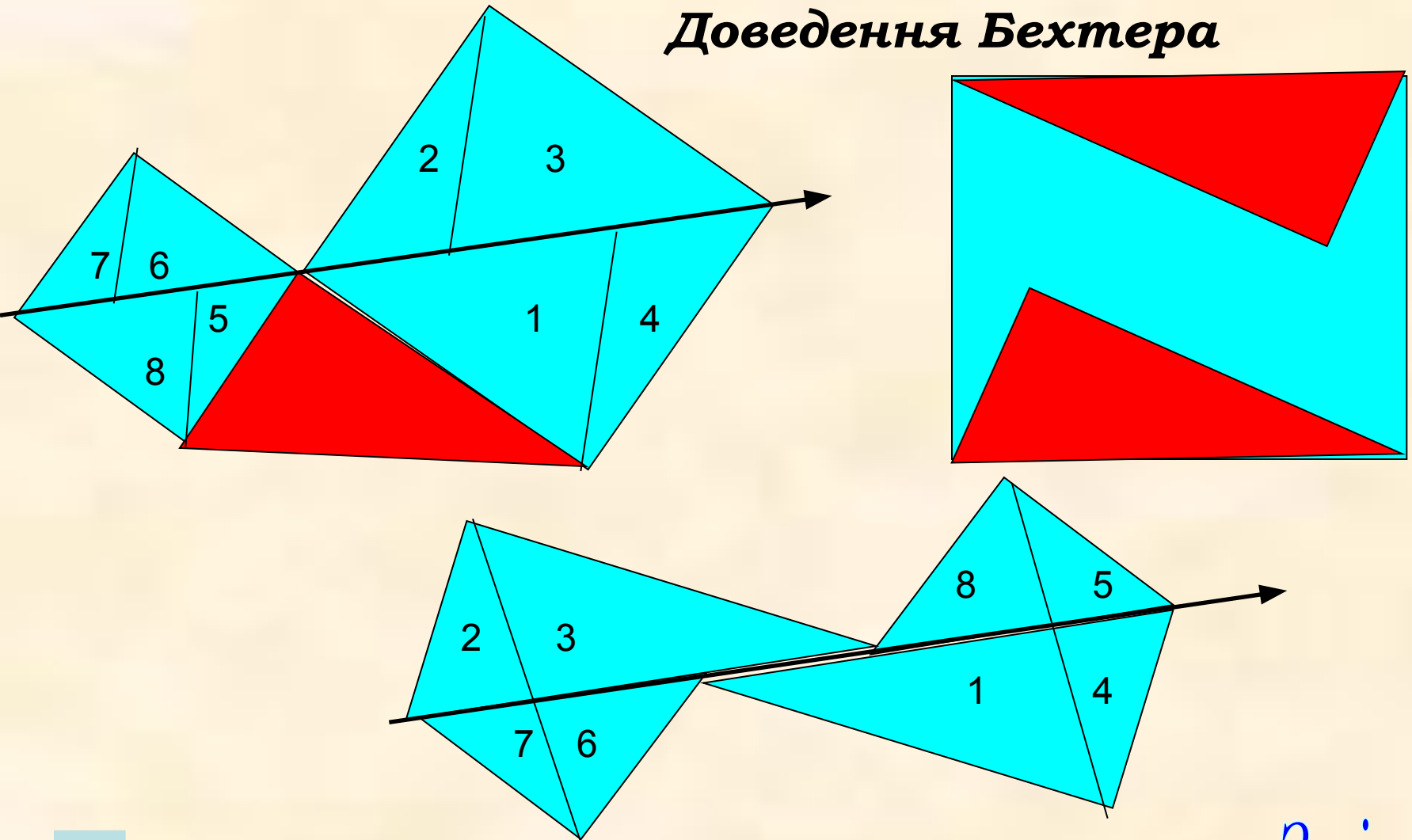
друга перпендикулярна

гіпотенузі.



Методи розкладання на рівновеликі площі

Доведення Бехтера

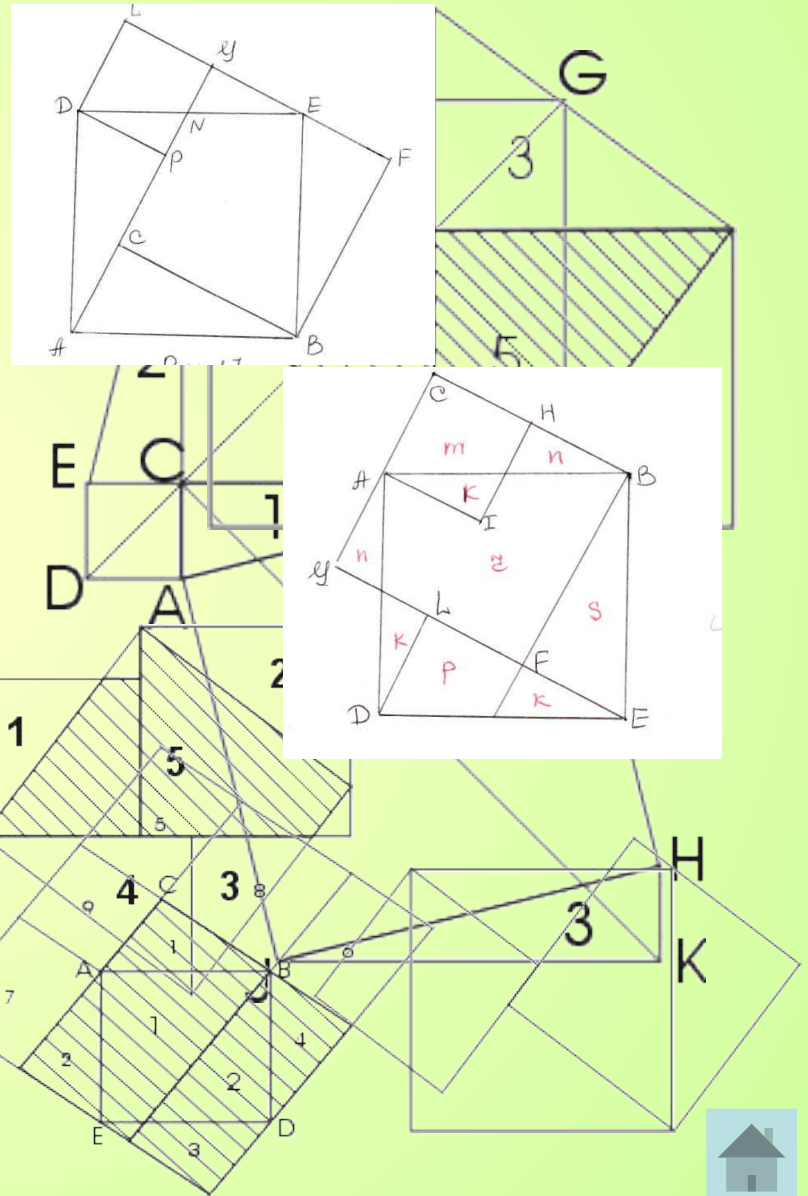


Зміст

Метод доповнення

Розглянемо ще один метод розкладання квідрата на кілька менших квідратів. Цю фігуру, яка зустрічається в доведених теоремах Піфагора близько IX ст. н.е., індуци називали "стілцем нареченої". Спосіб побудови квадрату зі стороною, що дорівнює гіпотенузі, видно з малюнка. Стилцьна частина двох квідратів, побудованих на катетах, і квідрат, побудований на гіпотенузі, - непрямокутний трикутник п'ятикутника двох квадратів. Звідси назва. Побудовані на катетах, а в На інших двох малюнках зображено схожі побудови, проте розташування квідратів дещо інші. Одне з таких доведень зображено на малюнку.

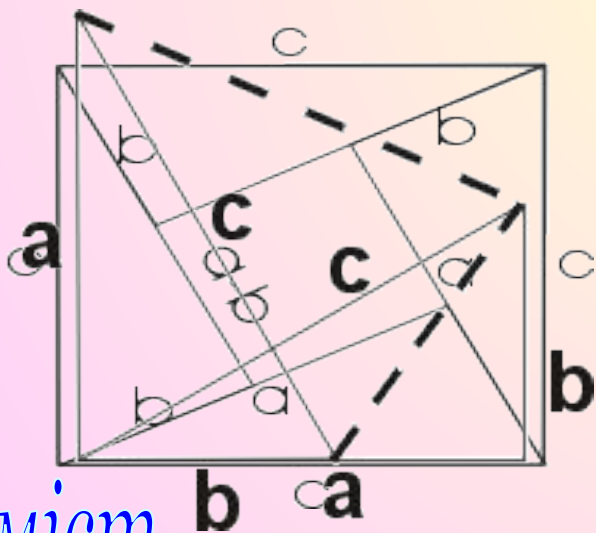
Зміст прямокутної рамки.



Алгебраїчні доведення

В деяких випадках для доведення теореми Піфагора використовують алгебраїчні тотожності.

Алгебраїчні доведення доводять істинність однієї з теорем Бхаскари і мовлять про собою менше одне слово «Цивись!»



Зміст

Ще одне алгебраїчне доведення Ініваскопювдванеліспрдіпунівау 1909ррідПряввкрощіВ трикутник довертнуто і до аа. За цим трикутній зображенням на мовлять до аа на два рівнобедрені трикутники, розглянувши площі яких, отримаємо формули, якою виражається теорема Піфагора



$$\frac{a+b}{2} (a+b) = 2 \cdot \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2,$$

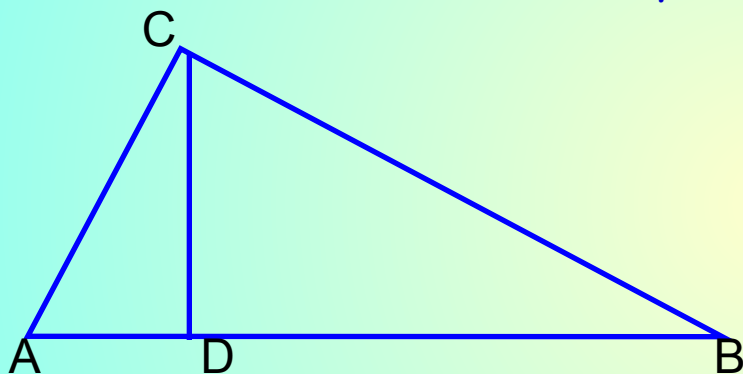
$$\text{звідси, } (a+b)^2 = 2ab + c^2,$$

$$\text{або } a^2 + b^2 = c^2$$



Метод подібності

Доведення теореми Піфагора методом подібності вперше з'явилося у Бхаскари (XII ст.), також воно є в книзі "Практична геометрія" Леонардо Фібоначчі та у Валліса (XVII ст.). У XIX-XX ст., йдучи по слідах Лежандра, більшість авторів шкільних підручників подають саме цей метод доведення теореми Піфагора.



З подібності трикутників ACD і CAB маємо:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{або} \quad AC^2 = AB \cdot AD$$

З подібності трикутників DCB і ABC маємо:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}, \quad \text{або} \quad BC^2 = AB \cdot BD$$

Додавши по частинах ці рівності, отримаємо:

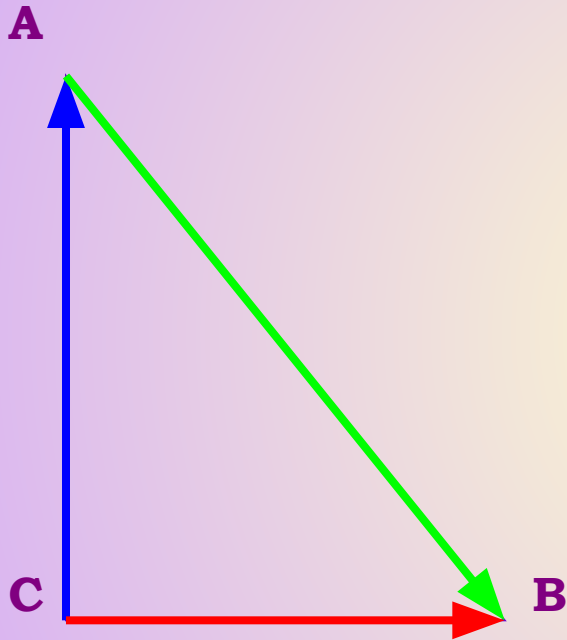
$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2, \quad \text{або} \\ AC^2 + BC^2 = AB^2$$



Зміст

Векторний метод

Теорема Піфагора може бути доведена за допомогою векторів.
Наведемо це доведення



Задамо на сторонах
трикутника ABC вектори

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$$

Розглянемо скалярний квадрат
вектора, побудованого на гіпотенузі

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}^2$$

Оскільки $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA}$, то $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

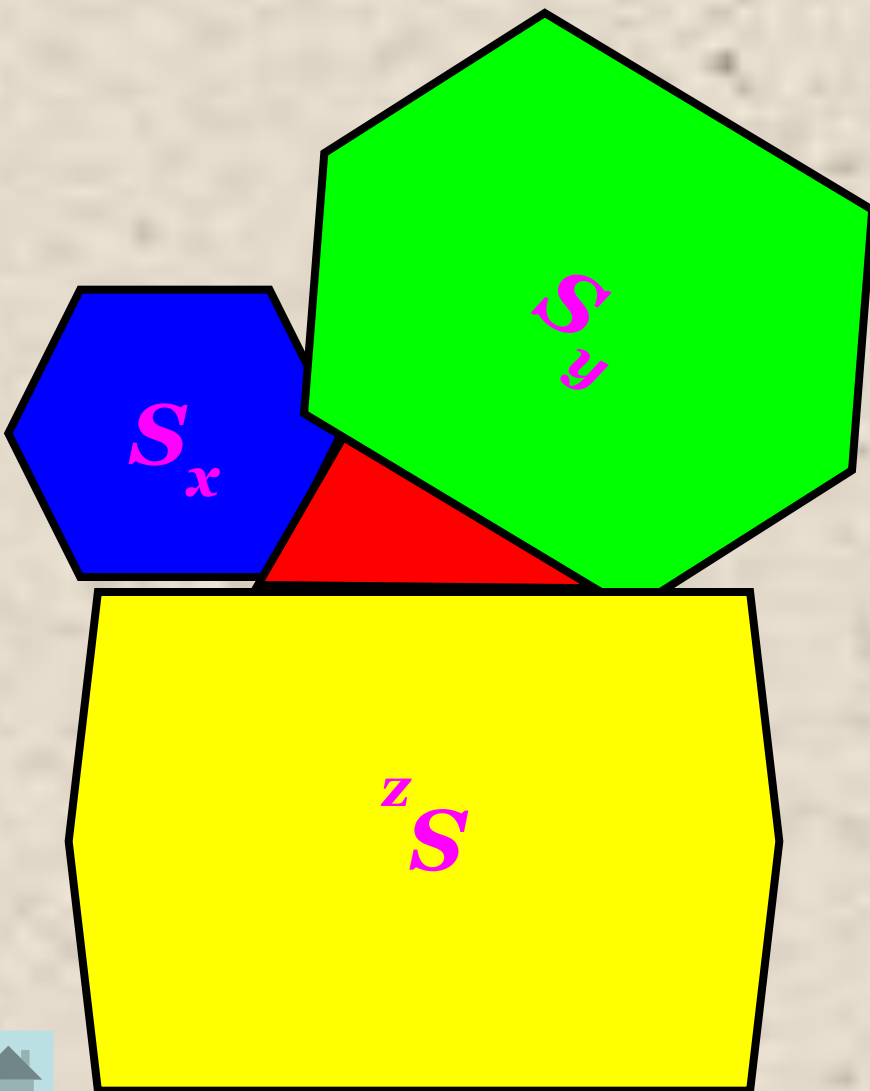
$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

$$AB^2 = CB^2 + CA^2$$



Зміст

Узагальнення теореми Піфагора



Теорема Піфагора може бути узагальнена, а саме: якщо замість квадратів на сторонах прямокутного трикутника побудувати довільні подібні між собою фігури. Причому, площі фігур, побудованих на катетах, позначити S_x та S_y , а на гіпотенузі – S_z , буде справедливою така рівність:

$$S_x + S_y = S_z$$

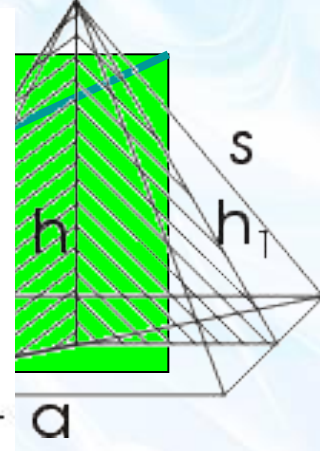
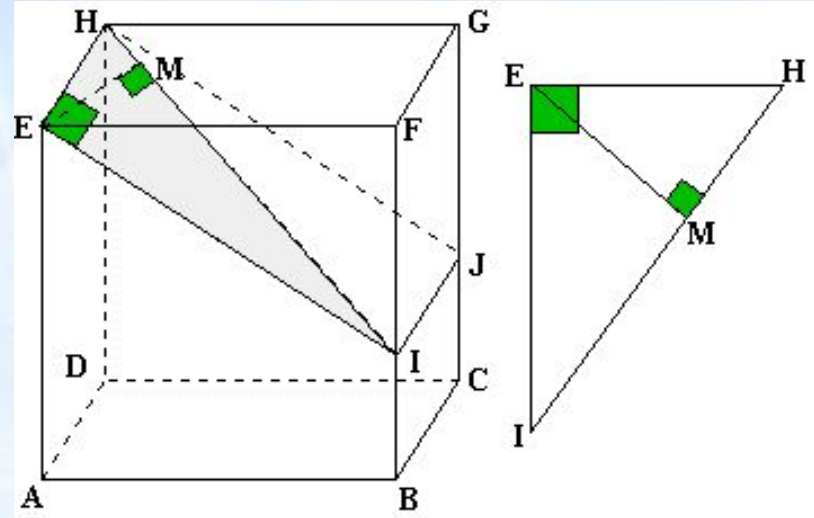
Зміст



Застосування теореми Піфагора

В математиці :

- ✓ Обчислення діагоналі квадрата та прямокутника;
- ✓ Знаходження висоти трикутника;
- ✓ Знаходження діагоналі куба та прямокутного паралелепіпеда;
- ✓ Знаходження висоти піраміди та конуса;
- ✓ Побудова перерізів куба та прямокутного паралелепіпеда;
- ✓ При побудові перерізів конуса.



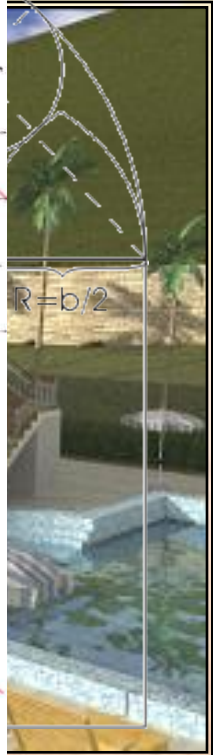
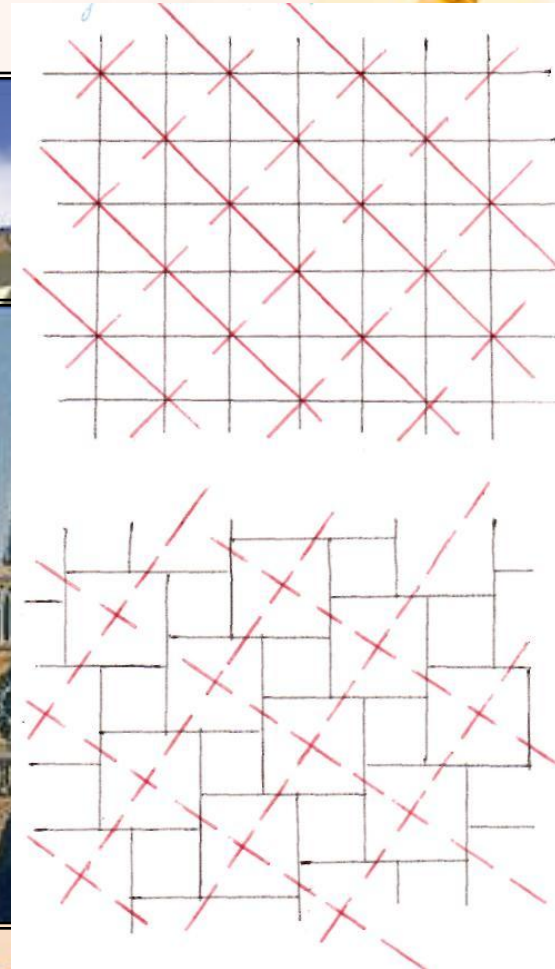
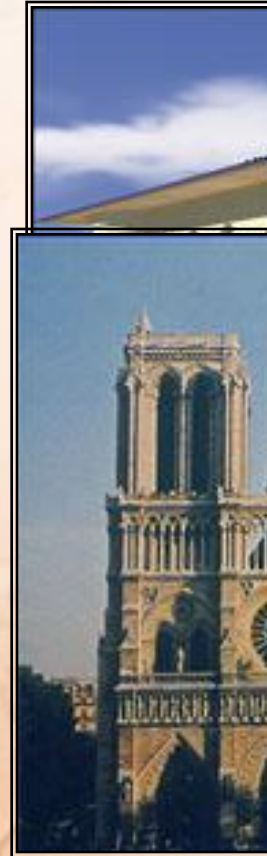
Застосування теореми Піфагора

В архітектурі

✓ При побудові будь-якої споруди розраховують відстані, центри тяжіння, розміщення опор, балок, тощо.

✓ В будівлях готичного і романського стилю верхні частини вікон розділяють камінними ребрами, які додають їм міцності ;

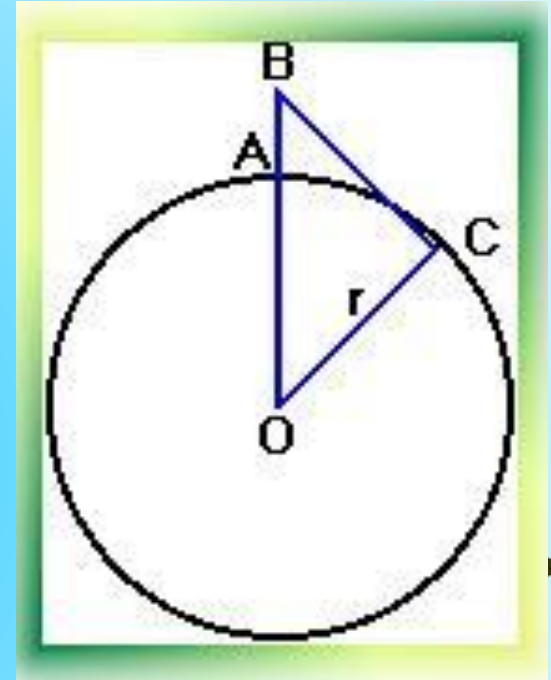
✓ Покриття площини рівними многокутниками ("паркетом").



Застосування теореми Піфагора

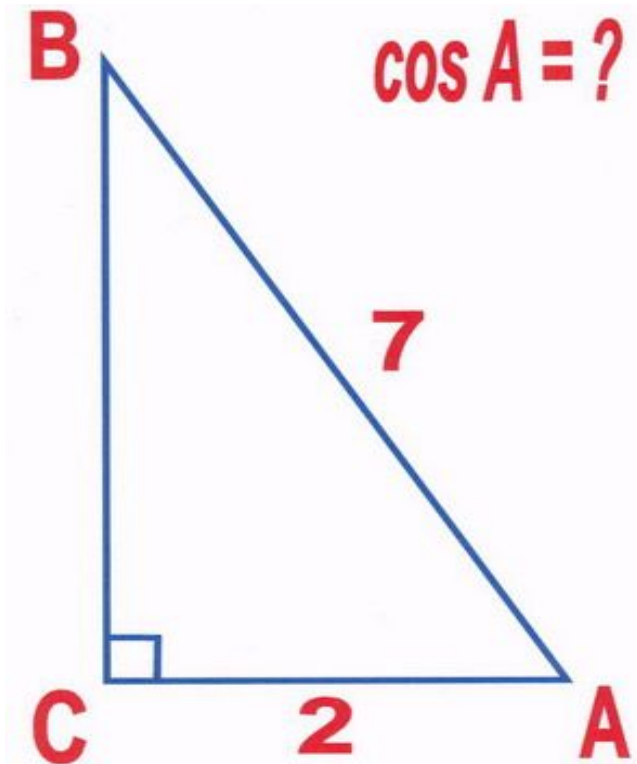
В астрономії

- ✓ При розрахунках шляху, який проходить промінь світла;
- ✓ Обчислення висоти антени мобільного оператора для кращого зв'язку.
- ✓ Радіосигнал від нашої цивілізації було передано в космос у вигляді теореми Піфагора;



Зміст

Тестові завдання



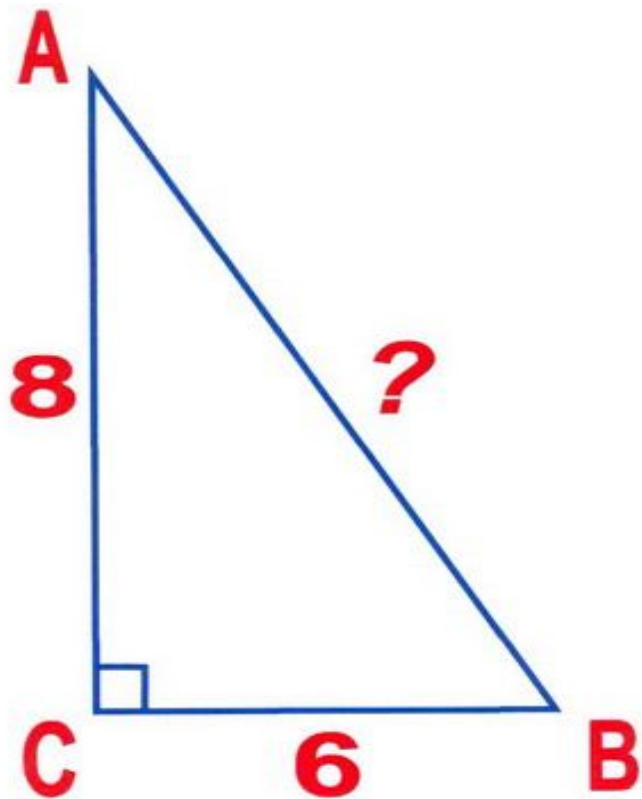
$$\cos A = \frac{2}{7}$$

$$\cos A = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\cos A = \frac{5}{7}$$



Тестові завдання



100

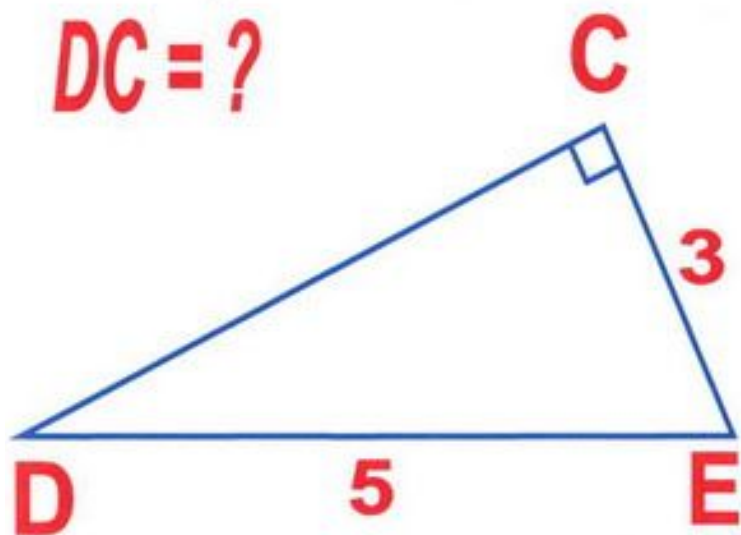
14

10



Зміст

Тестові завдання



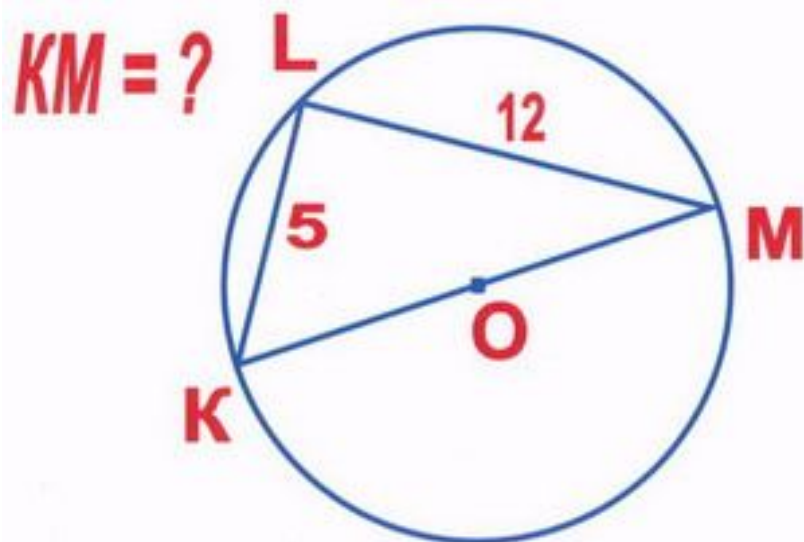
4

2

16



Тестові завдання



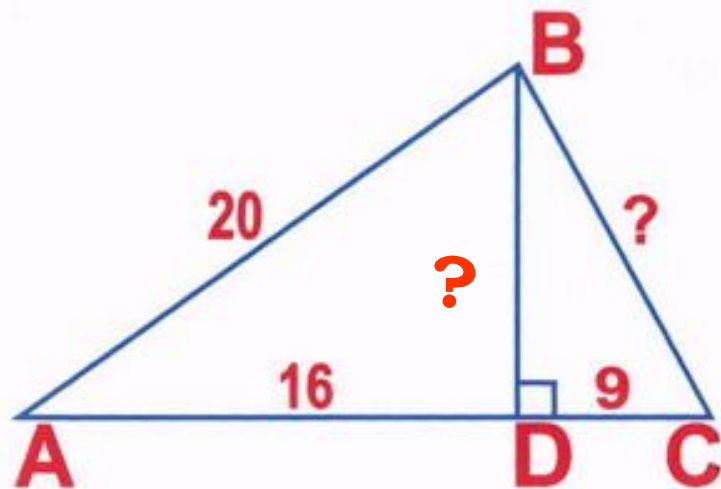
± 13

13

7



Тестові завдання



BC - ?

BD - ?

15, 12

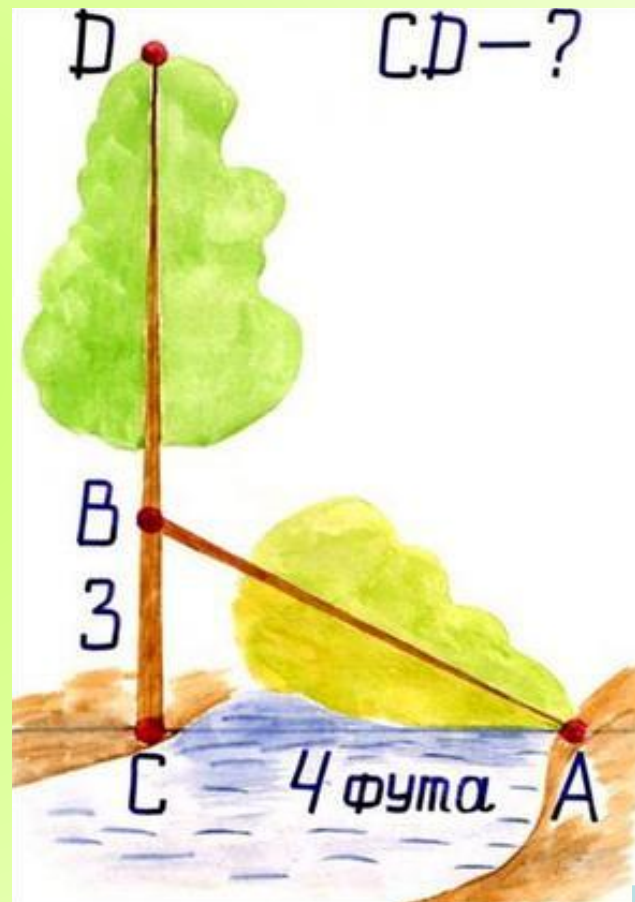
45, 36

5, 4



Задача індійського математика XII століття Бхаскари

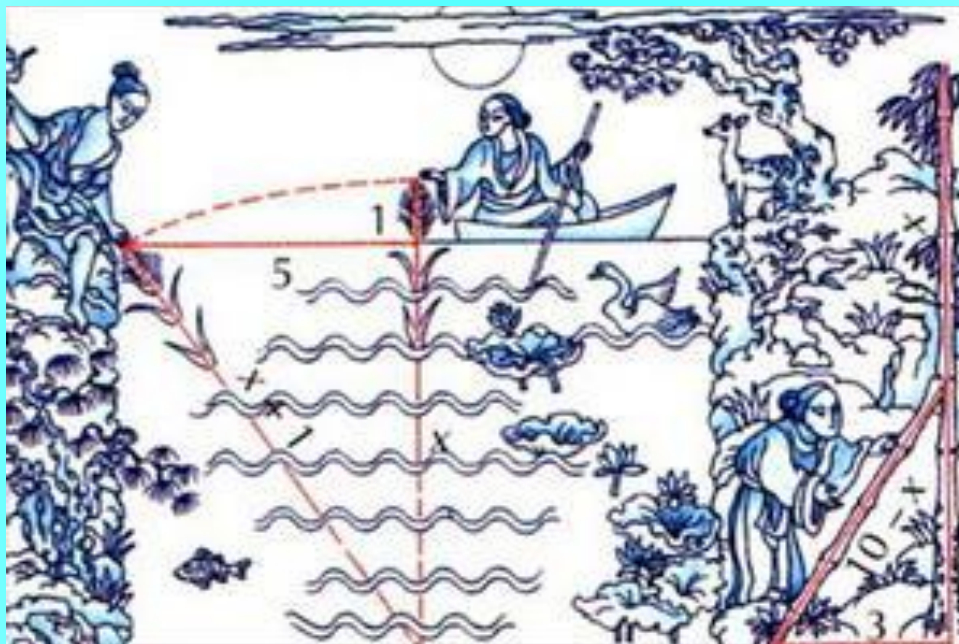
«На березі річки росла тополя
одинок.
Зненацька вітра подих її стовбур
зламав.
Бідна тополя упала. І кут утворив
прямий
Її стовбур із течією ріки
Дізнайся, що річка була у цьому
місці 4 фути завширки
Верхівка торкнулася краю ріки
Лишилось від стовбура фута лише
зтри.
Дізнайся скоріше, будь-ласка,
скажи
Яка висота у тополі була?»



Зміст



Задача з китайської «Математики в дев'яти книгах»

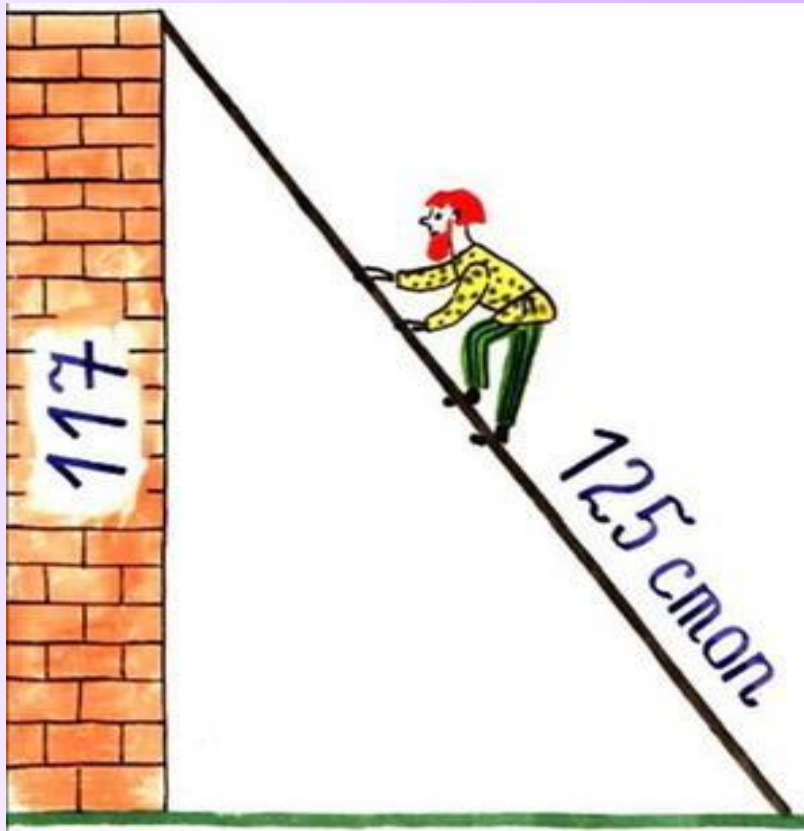


У ставку, діаметр якого 1 чжан = 10 чи, росте очерет, якого видно над водою на 1 чи. Якщо потягнути очерет до берегу, то від торкнеться його. Питається: яка глибина ставка і яка довжина очерету?

Зміст



Задача з підручника «Арифметика» Леонтія Магницького



Може трапитись пересічній людині до стіни драбину приладити, причому стіни тієї висота є 117 стоп. А драбина має довжину 125 стоп. Дійзнайся, кілька стоп від стіни має поставити нижний кінець людина.

Зміст

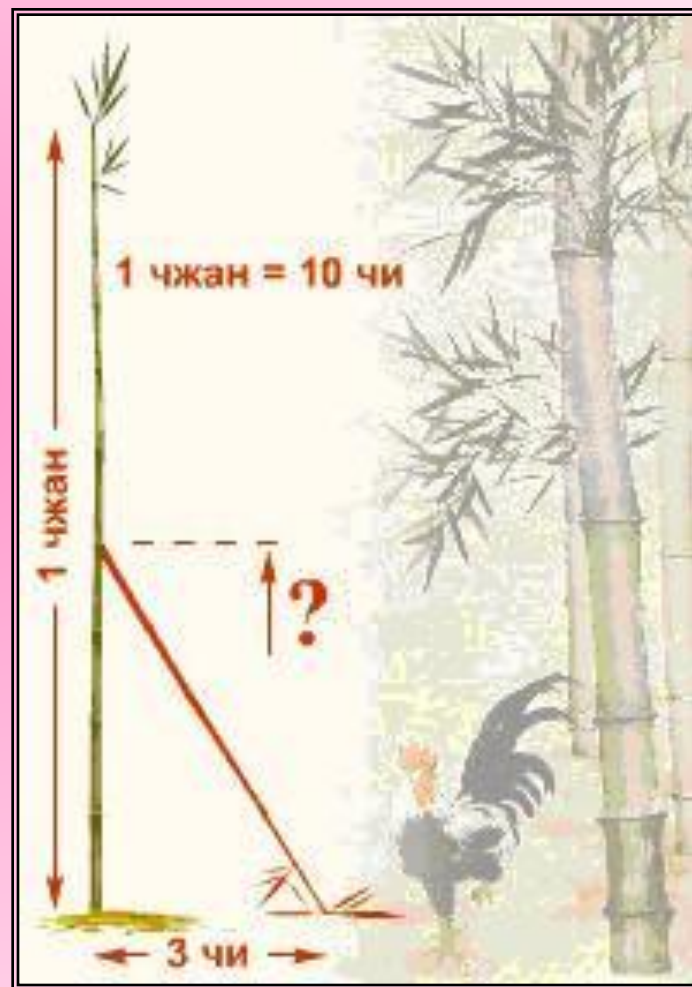


Задача про бамбук з давньокитайського трактату 'Гоу-гу'"

Є бамбук завдовжки 1 чжан. Верхівку його зігнули таким чином, що вона торкається землі на відстані 3 чи від його кореня.

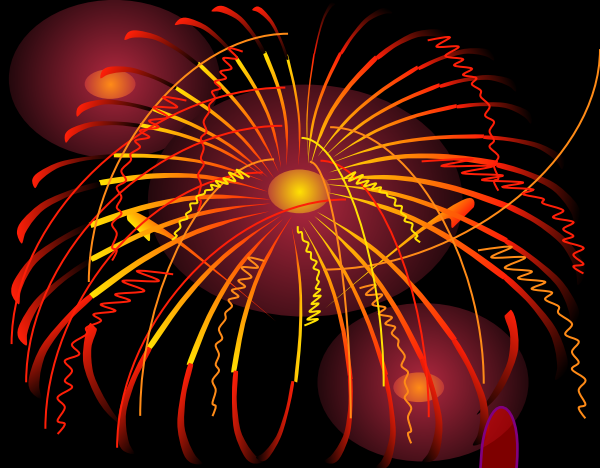
(1 чжан = 10 чи).

Яка висота бамбука після згинання?



Зміст





Молодец!



Помилка!

Спробуй ще!



Дякую за увагу!