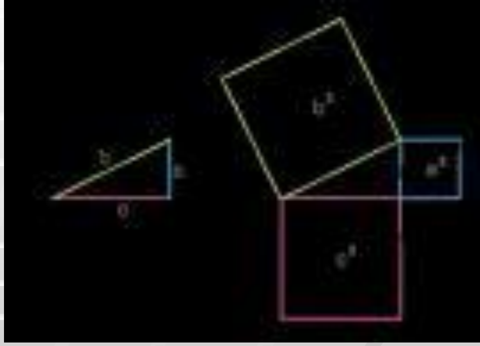
Теорема Пифагора

Различные формулировки

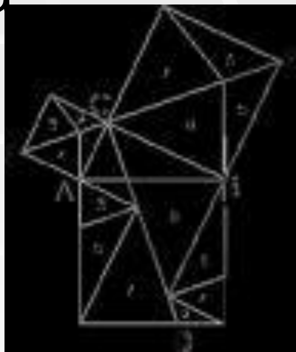
Как известно…



- Теорема Пифагора звучит так: **«В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов», но…**
- **Как звучала эта теорема у Евклида: «В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол »**
- **Как звучала у Аннаирици**: «Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол»

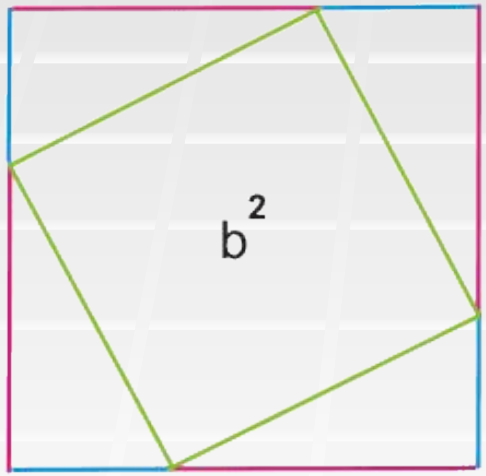
Научное открытие

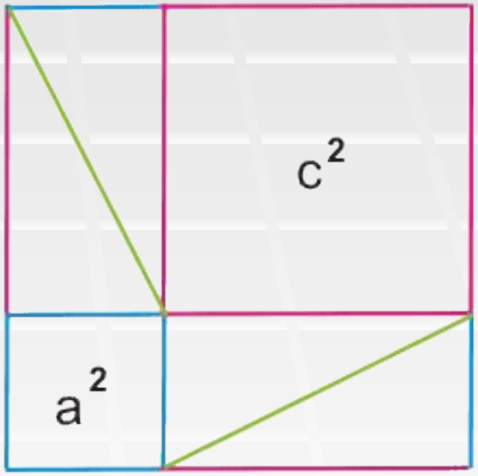
- В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифатор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге. Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводит в первой книге своих "Начал". С другой стороны, Прокл утверждает, что доказательство в "Началах" принадлежит самому Евклиду. Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Зато легенда сообщает даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Многим известен сонет Шамиссо:



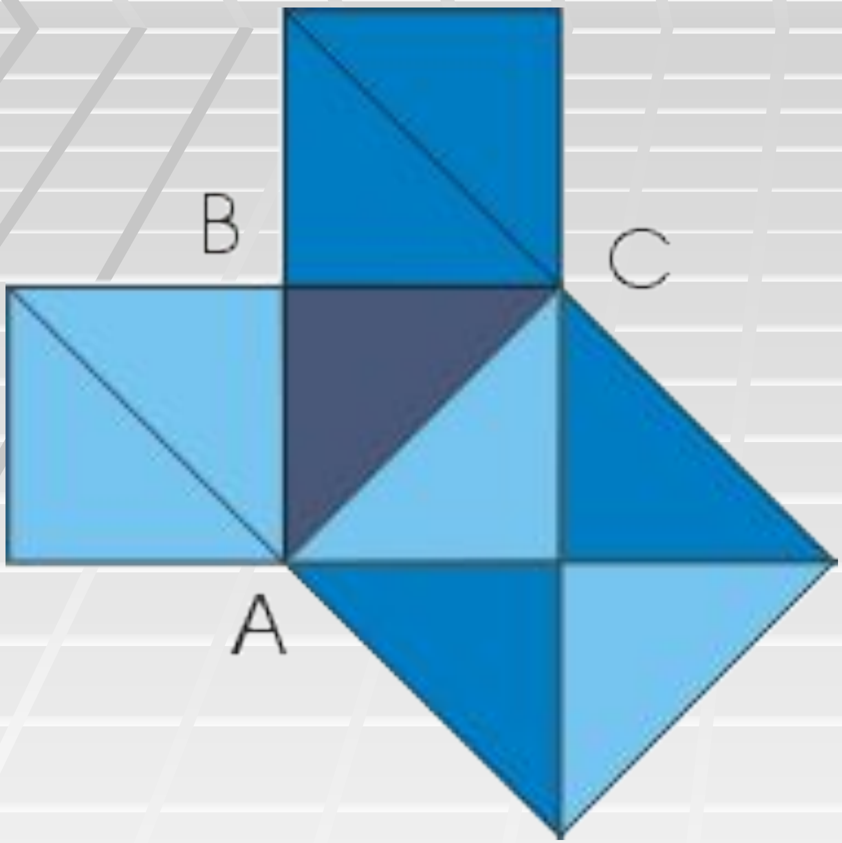
Доказательства теоремы Пифагора

1. Простейшее
2. Метод разложения
3. Метод дополнения
4. Другие…





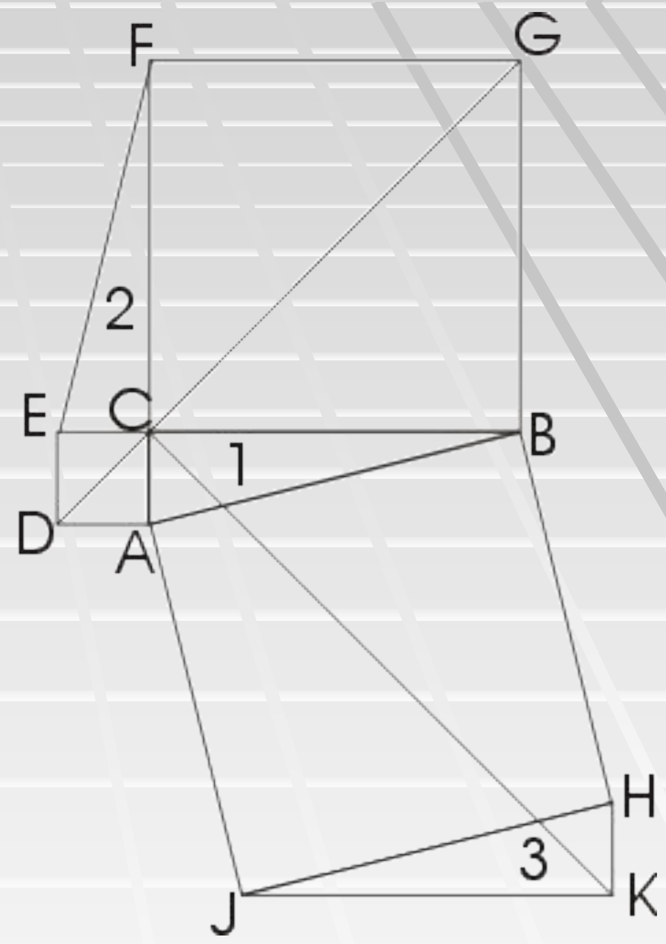
Простейшее доказательство



- Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников , чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для треугольника ABC : квадрат, построенный на гипотенузе AC, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,- по два.
- **Теорема доказана.**

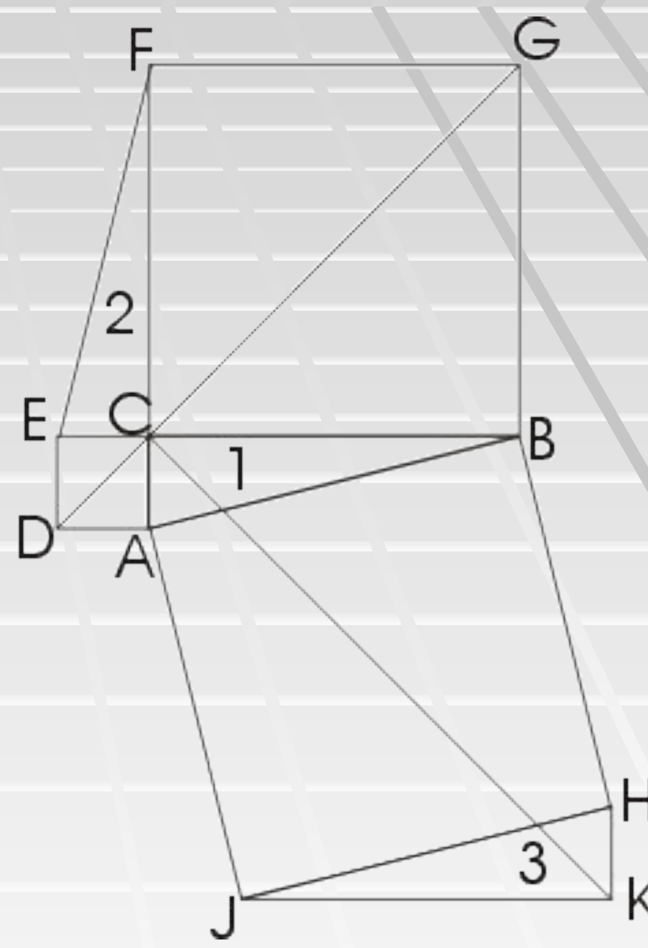
Доказательство методом дополнения

- От двух равных площадей нужно отнять равновеликие части так, чтобы в одном случае остались два квадрата, построенные на катетах, а в другом- квадрат, построенный на гипотенузе. Ведь если в равенствах: **B-A=C** и **B1-A1=C1**. Часть **A** равновелика части **A1**, а часть **B** равновелика **B1**, то части **C** и **C1** также равновелики.



Доказательство методом дополнения

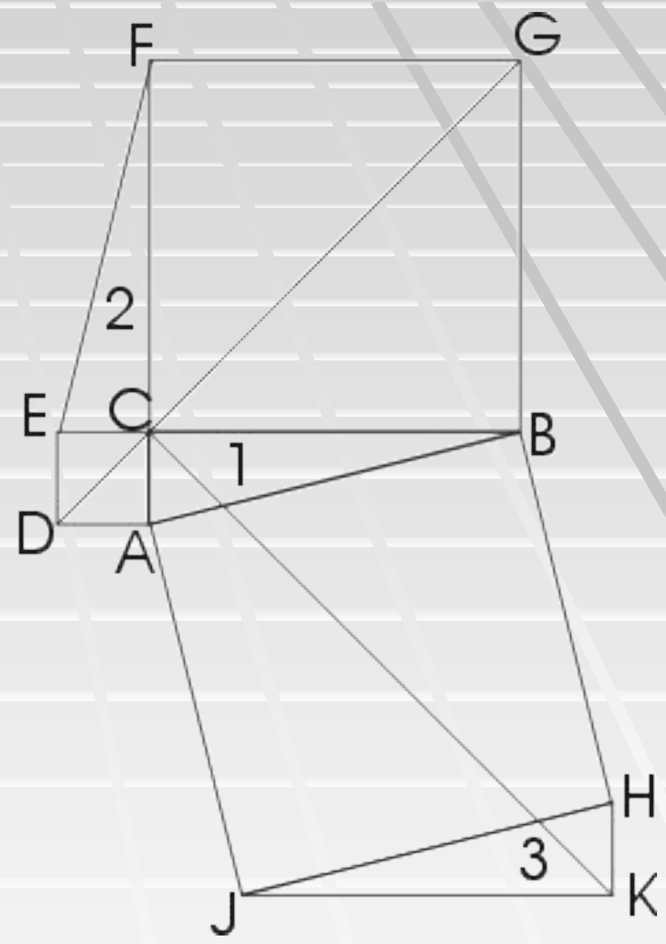
- Поясним этот метод на примере. На рис. к обычной пифагоровой фигуре приставлены сверху и снизу треугольники 2 и 3, равные исходному треугольнику 1. Прямая DG обязательно пройдет через C. Заметим теперь (далее мы это докажем), что шестиугольники DABGFE и CAJKHB равновелики. Если мы от первого из них отнимем треугольники 1 и 2, то останутся квадраты, построенные на катетах, а если от второго шестиугольника отнимем равные треугольники 1 и 3, то останется квадрат, построенный на гипотенузе. Отсюда вытекает, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.



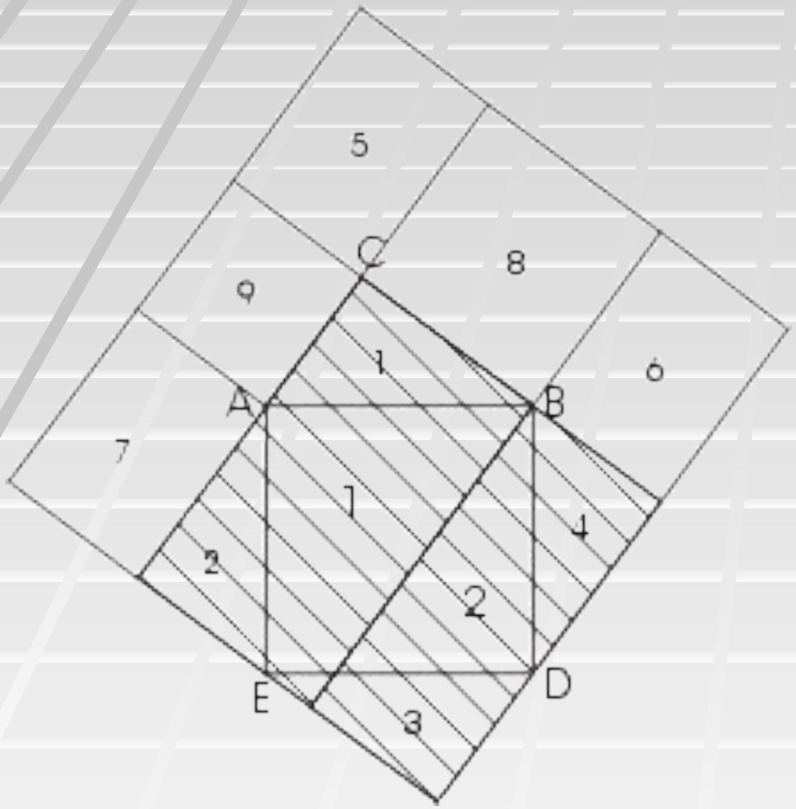
Доказательство методом дополнения

- Остается доказать, что наши шестиугольники равновелики. Заметим, что прямая DG делит верхний шестиугольник на равновеликие части; то же можно сказать о прямой CK и нижнем шестиугольнике. Повернем четырехугольник DABG, составляющий половину шестиугольника DABGFE, вокруг точки A по часовой стрелке на угол 90; тогда он совпадет с четырехугольником CAJK, составляющим половину шестиугольника CAJKHB. Поэтому шестиугольники DABGFE и CAJKHB равновелики.

Теорема доказана

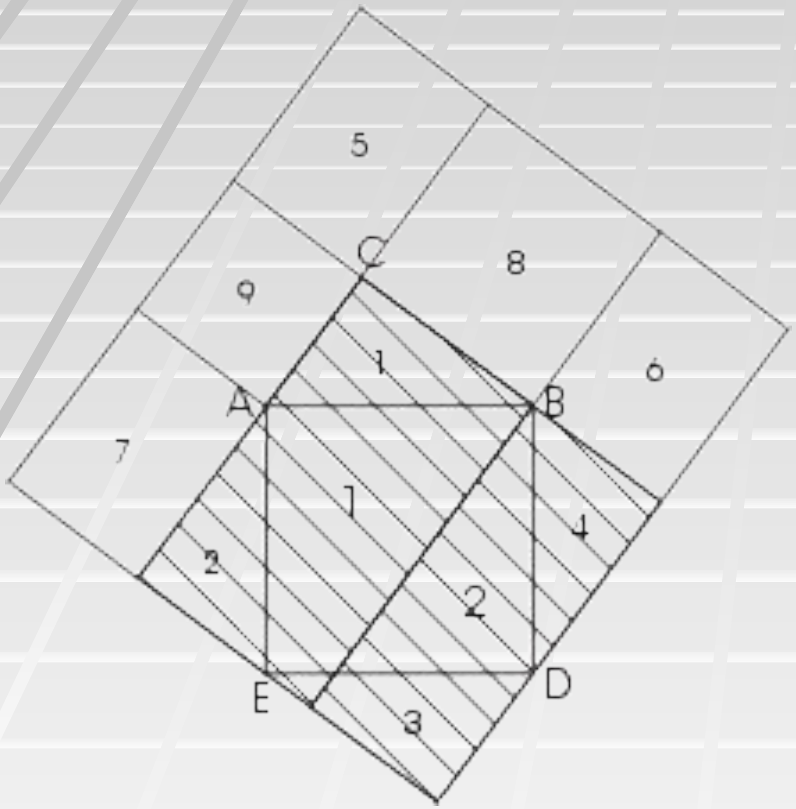


Доказательство методом вычитания



- Знакомый нам чертеж теоремы Пифагора заключим в прямоугольную рамку, направления сторон которой совпадают с направлениями катетов треугольника. Продолжим некоторые из отрезков фигуры так, как указано на рисунке, при этом прямоугольник распадается на несколько треугольников, прямоугольников и квадратов. Выбросим из прямоугольника сначала несколько частей так чтобы остался лишь квадрат, построенный на гипотенузе. Эти части следующие:

Доказательство методом вычитания



- треугольники 1, 2, 3, 4;

прямоугольник 5;

прямоугольник 6 и квадрат 8;

прямоугольник 7 и квадрат 9;

Затем выбросим из прямоугольника части так, чтобы остались только квадраты, построенные на катетах. Этими частями будут:

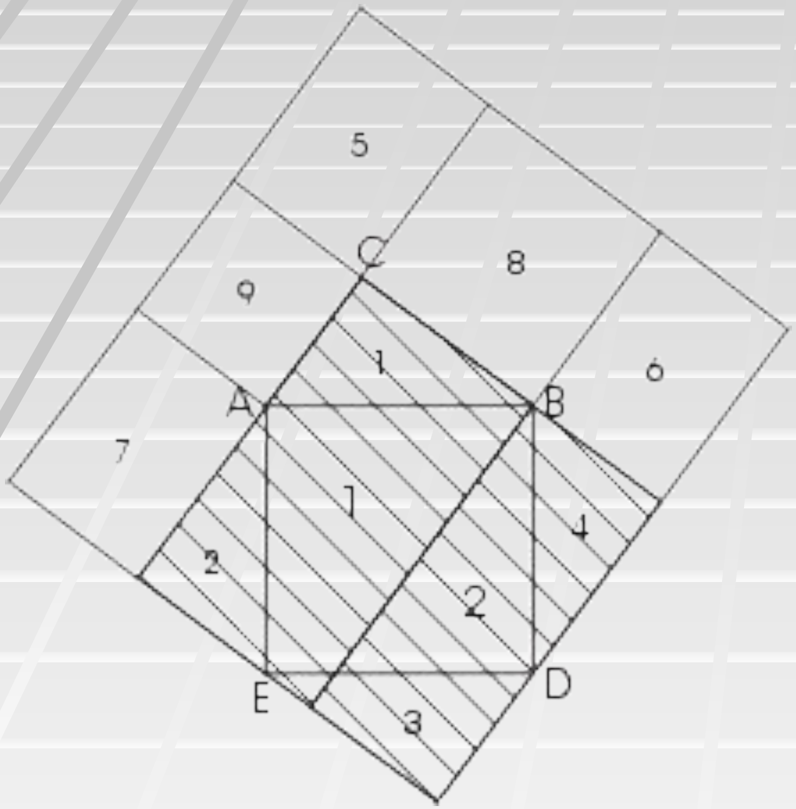
прямоугольники 6 и 7;

прямоугольник 5;

прямоугольник 1(заштрихован);

прямоугольник 2(заштрихован);

Доказательство методом вычитания



Нам осталось лишь показать, что отнятые части равновелики. Это легко видеть в силу расположения фигур. Из рисунка ясно, что:

прямоугольник 5 равновелик самому себе;

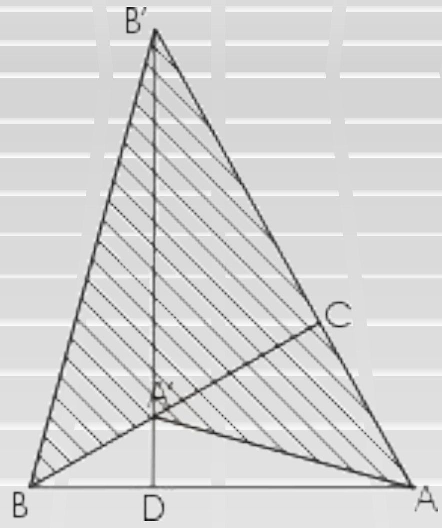
четыре треугольника 1,2,3,4 равновелики двум прямоугольникам 6 и 7;

прямоугольник 6 и квадрат 8, взятые вместе, равновелики прямоугольнику 1 (заштрихован);;

прямоугольник 7 вместе с квадратом 9 равновелики прямоугольнику 2(заштрихован);

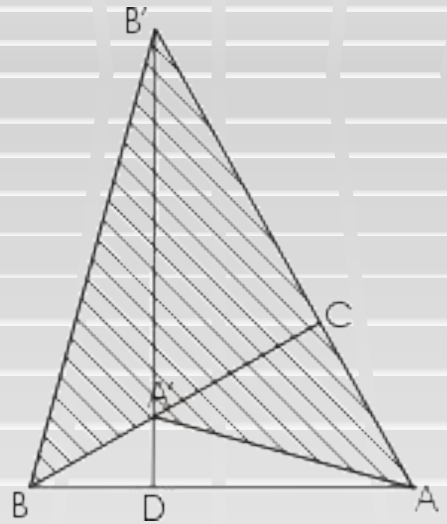
Доказательство закончено

Доказательство Хоукинса



- Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на 90° так, чтобы он занял положение A'CB'. Продолжим гипотенузу A'B' за точку A' до пересечения с линией AB в точке D. Отрезок B'D будет высотой треугольника B'AB. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник A'AB'B . Его можно разложить на два равнобедренных треугольника CAA' и CBB' (или на два треугольника A'B'A и A'B'B).

Доказательство Хоукинса



$S_{CAA'}=b^2/2$, $S_{CBB'}=a^2/2$

$S_{A'AB'B}=(a^2+b^2)/2$

Треугольники A'B'A и A'B'B имеют общее основание c и высоты DA и DB, поэтому :

- $S_{A'AB'B}=c*DA/2+ c*DB/2=c(DA+DB)/2=c^2/2$

Сравнивая два полученных выражения для площади, получим:

$a^2+b^2=c^2$

Теорема доказана.

Векторное доказательство

Пусть ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C, построенный на векторах. Тогда справедливо векторное равенство:b+c=a

откуда имеем

c = a - b

возводя обе части в квадрат, получим

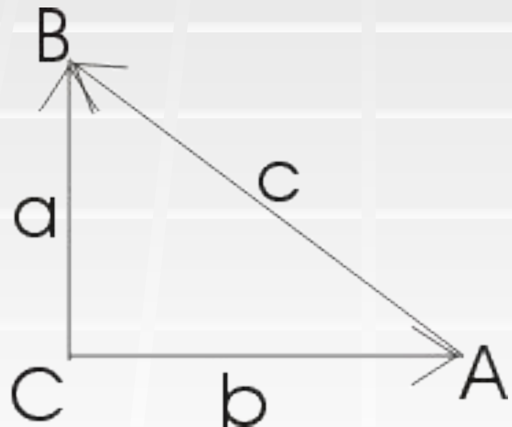
$c^2=a^2+b^2-2ab$

Так как a перпендикулярно b, то ab=0, откуда

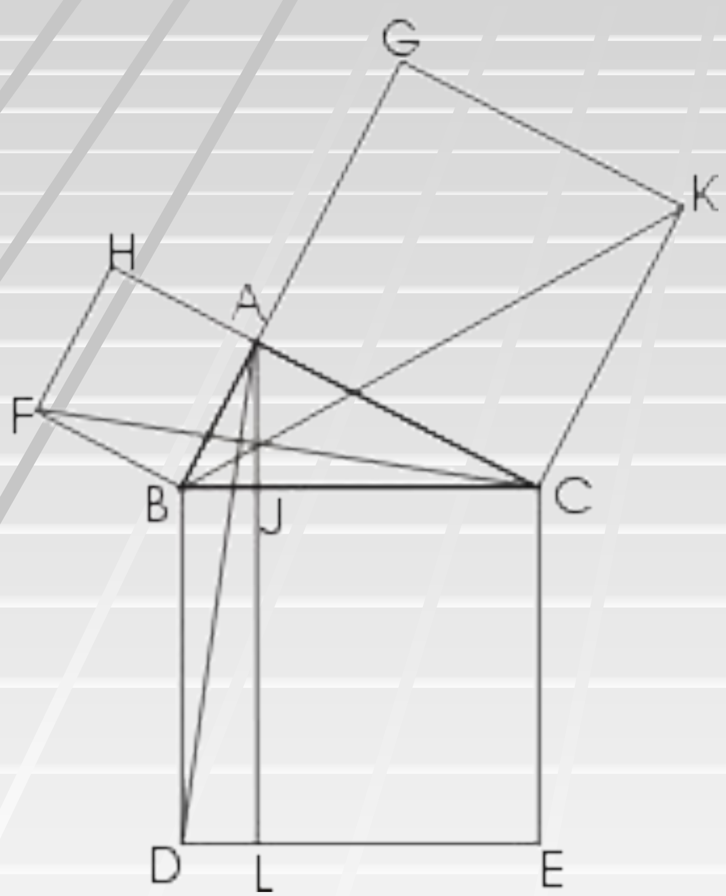
$c^2=a^2+b^2$ или $c^2=a^2+b^2$

Нами снова доказана теорема Пифагора.

Если треугольник ABC - произвольный, то та же формула дает т. н. **теорему косинусов**, обобщающую теорему Пифагора.

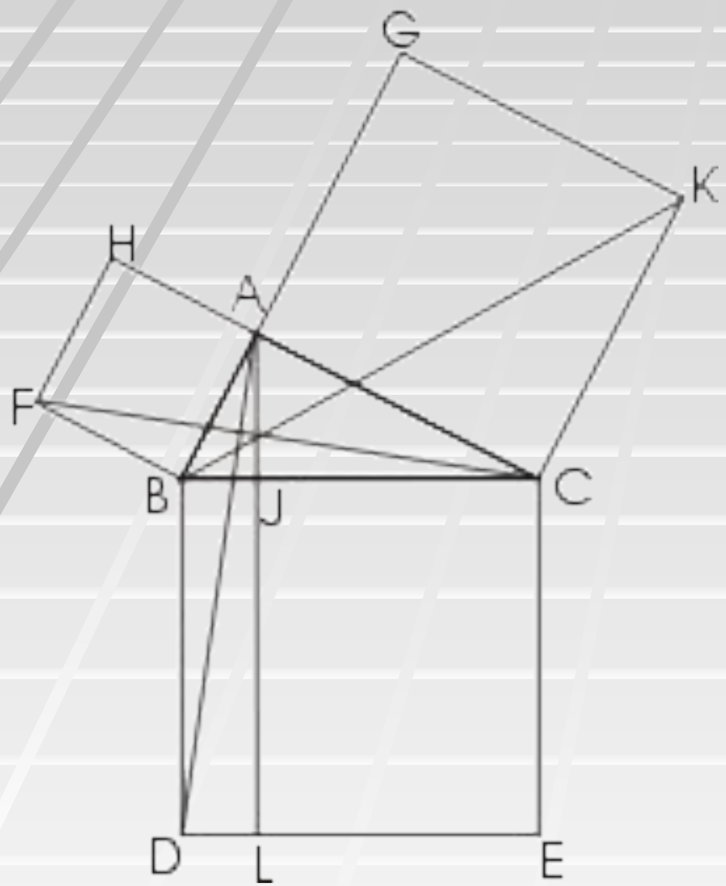


Доказательство Евклида



- Это доказательство было приведено **Евклидом** в его "Началах". По свидетельству **Прокла (Византия)**, оно придумано самим Евклидом. Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал".
- На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник ICEL - квадрату АСКС. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе.
- В самом деле, треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними:

Доказательство Евклида

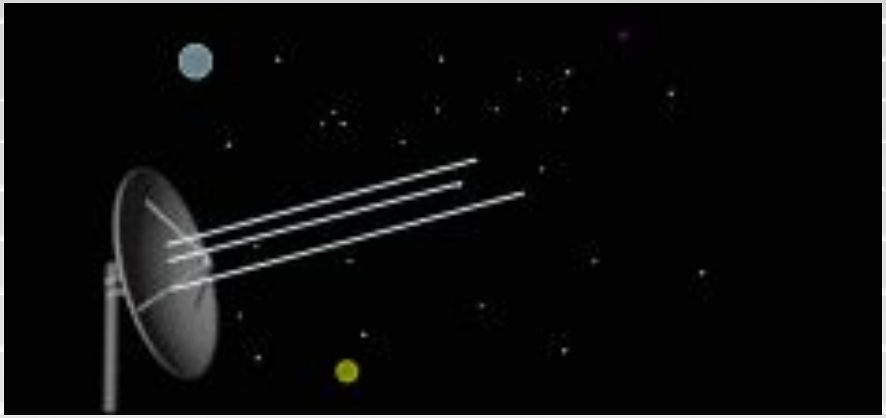


- FB = AB, BC = BD

PFBC = d + PABC = PABD

Но
SABD = 1/2 S BJLD,
так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD.
Аналогично
SFBC=1\2S ABFH
(BF-общее основание, AB-общая высота). Отсюда, учитывая, что
SABD=SFBC,
имеем
SBJLD=SABFH.
Аналогично, используя равенство треугольников BCK и ACE, доказывается, что
SJCEL=SACKG.
Итак,
SABFH+SACKG= SBJLD+SJCEL= SBCED,
что и требовалось доказать.

Удивительный факт



- Вопрос о том, можно ли с помощью световых сигналов объясняться с этими гипотетическими существами, вызвал оживленную дискуссию. Парижской академией наук была даже установлена премия в 100000 франков тому, кто первый установит связь с каким-нибудь обитателем другого небесного тела; эта премия все еще ждет счастливца. В шутку, хотя и не совсем безосновательно , было решено **передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора**.

  Неизвестно, как это сделать; но для всех очевидно, что математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал.

Итоги работы

- На самом деле существует много способов доказательства теоремы Пифагора: доказательство Евклида, Хоукинса, Вальдхейма, способ «луночками» Гиппократа, доказательство Басхары, Эпштейна, Нильсена, Бетхера, Перигаля, Гутхейля, векторное доказательство и многие другие…