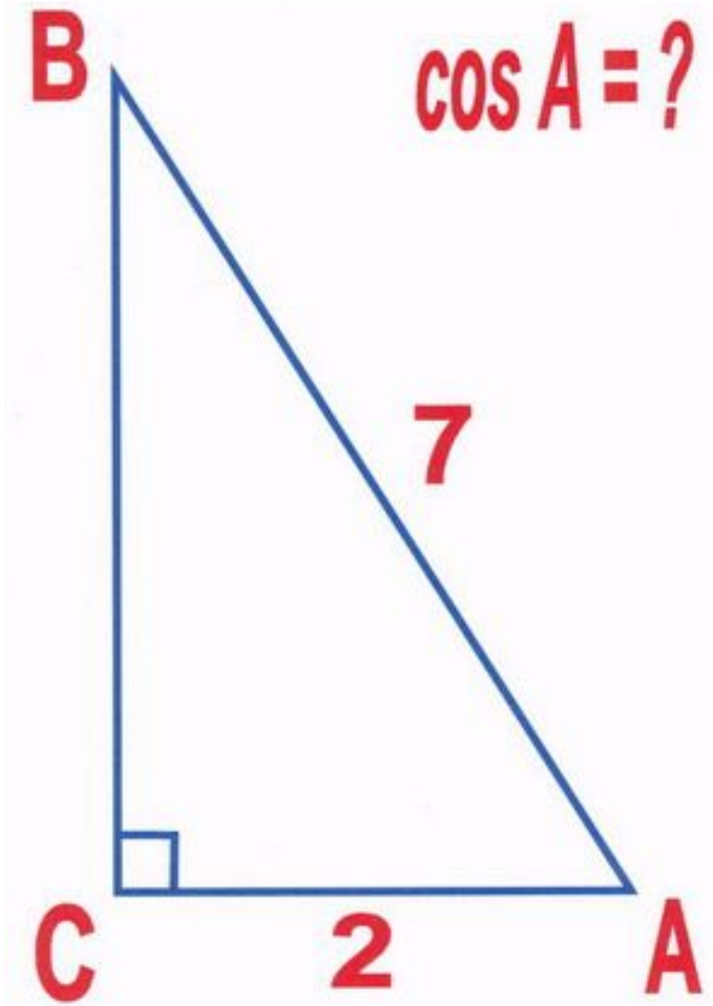
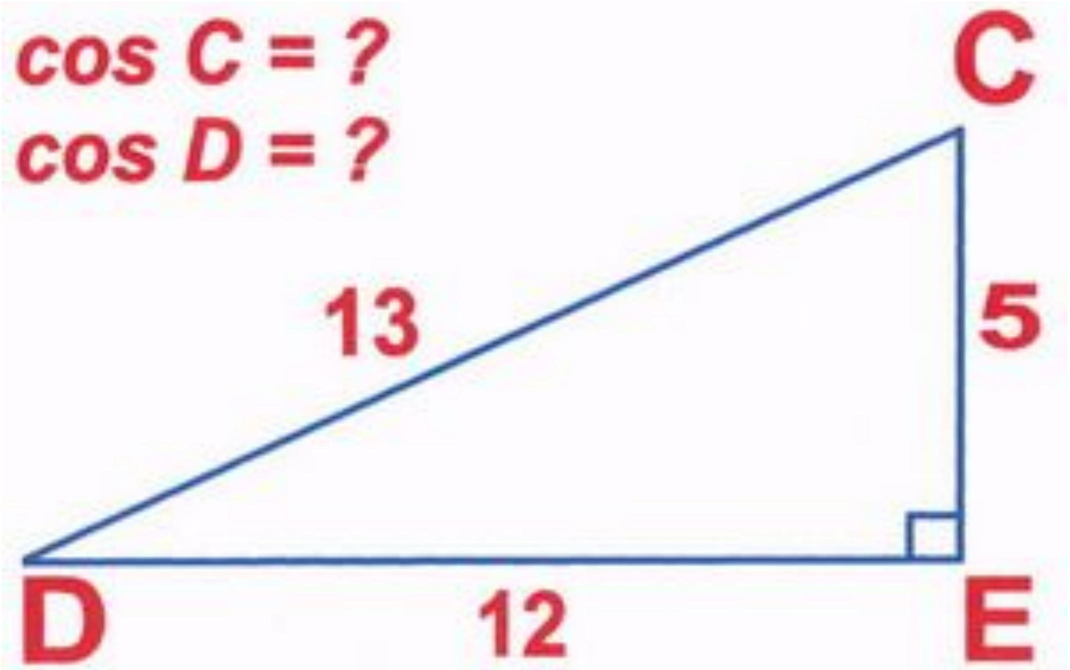
Теорема Пифагора

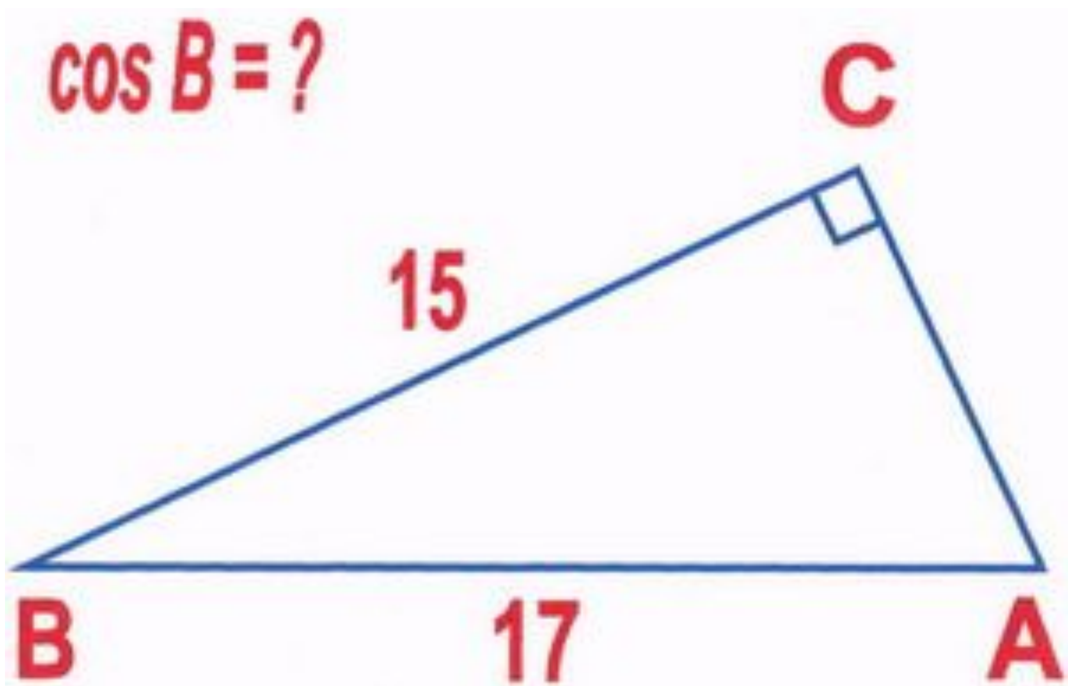
Задача



Задача



Задача



Пифагор Самосский

(ок. 580 – ок. 500 г. до н.э.)

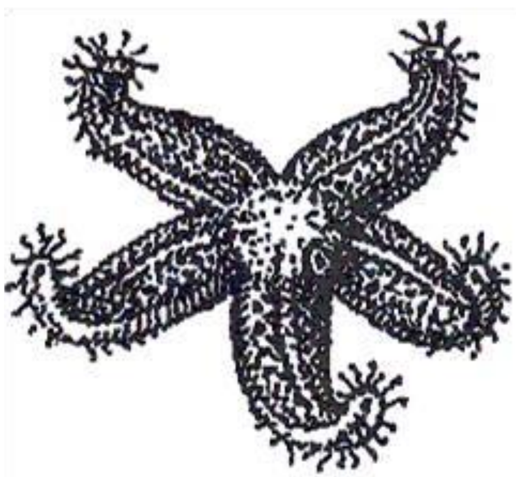
Открытия пифагорейцев

Пифагорейцами было сделано много важных открытий в арифметике и геометрии, в том числе:

- теорема о сумме внутренних углов треугольника;
- построение правильных многоугольников и деление плоскости на некоторые из них;
- геометрические способы решения квадратных уравнений;
- деление чисел на чётные и нечётные, простые и составные; введение фигурных, совершенных и дружественных чисел;
- доказательство того, что корень из 2 не является рациональным числом;
- создание математической теории музыки и учения об арифметических, геометрических и гармонических пропорциях и многое другое.

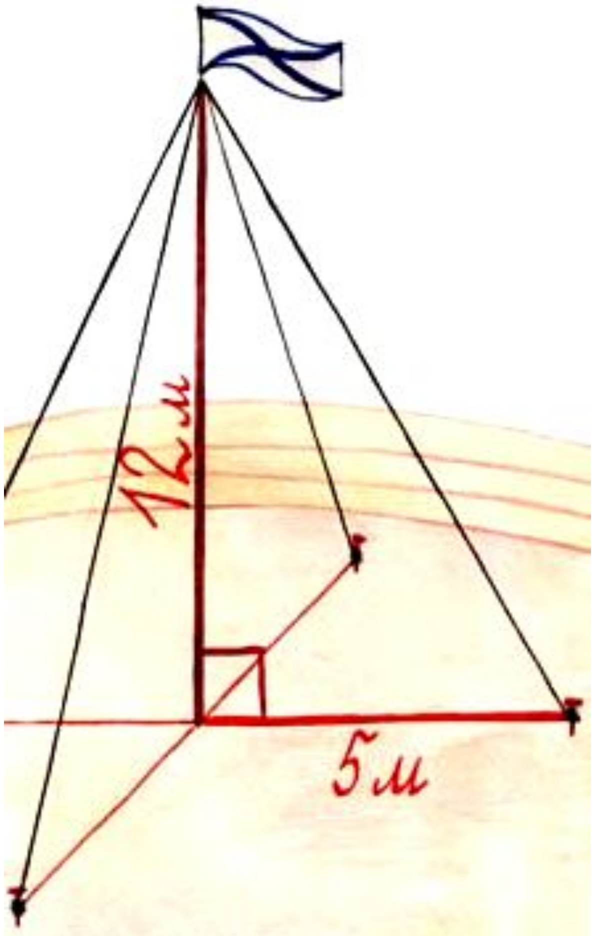
Поворотная симметрия 5-го порядка

ШИПОВНИК КОРИЧНЕВЫЙ



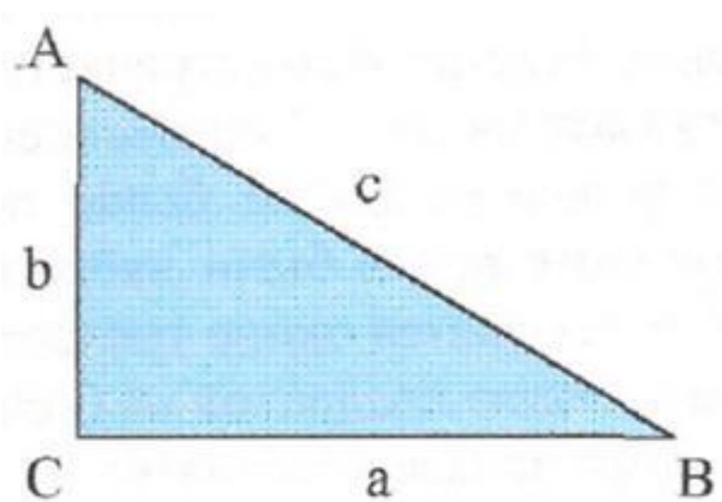
ЛАПЧАТКА ГУСИНАЯ

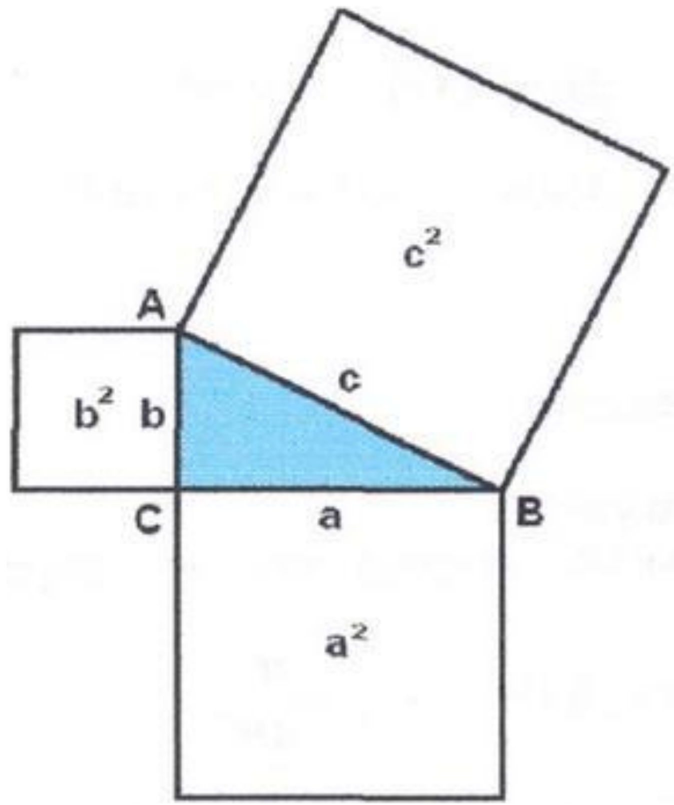
Задача



Для крепления мачты нужно установить 4 троса. Один конец каждого троса должен крепиться на высоте 12 м, другой на земле на расстоянии 5 м от мачты. Хватит ли 50 м троса для крепления мачты?

$c^2 = a^2 + b^2$

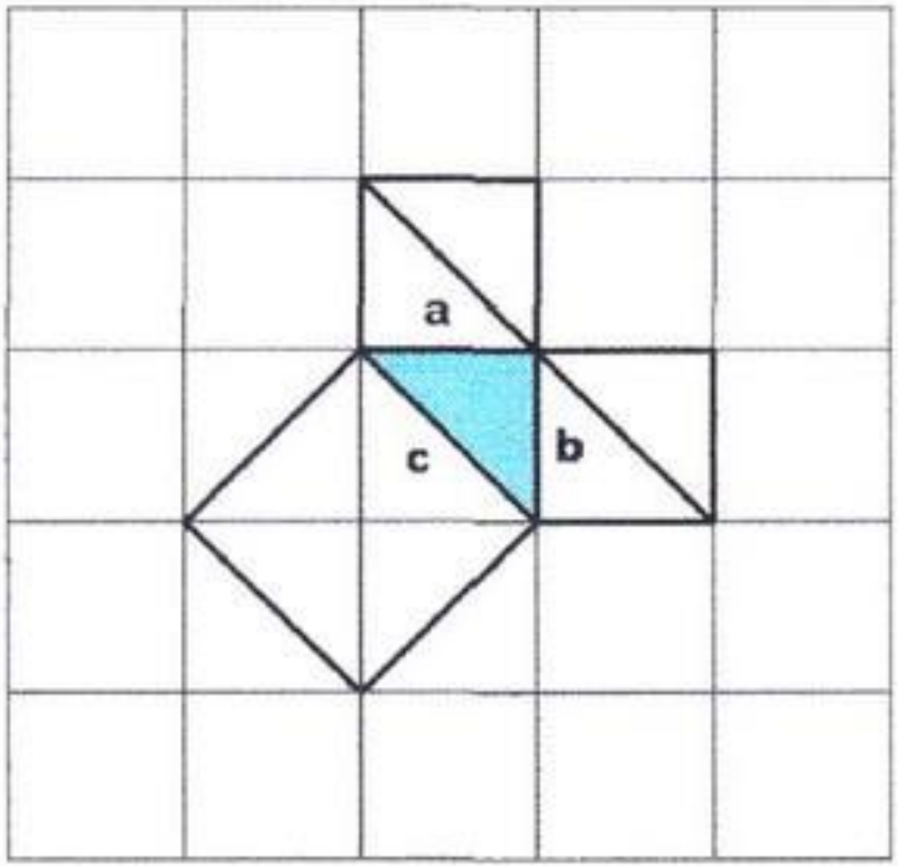


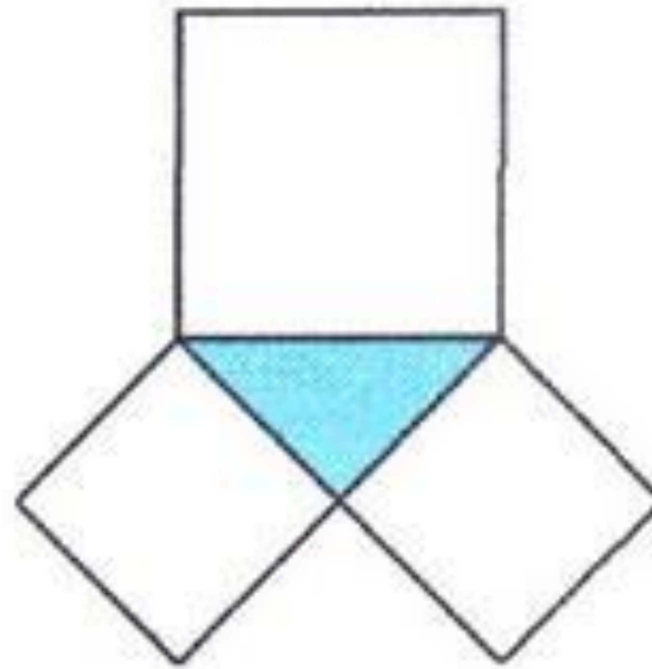


В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

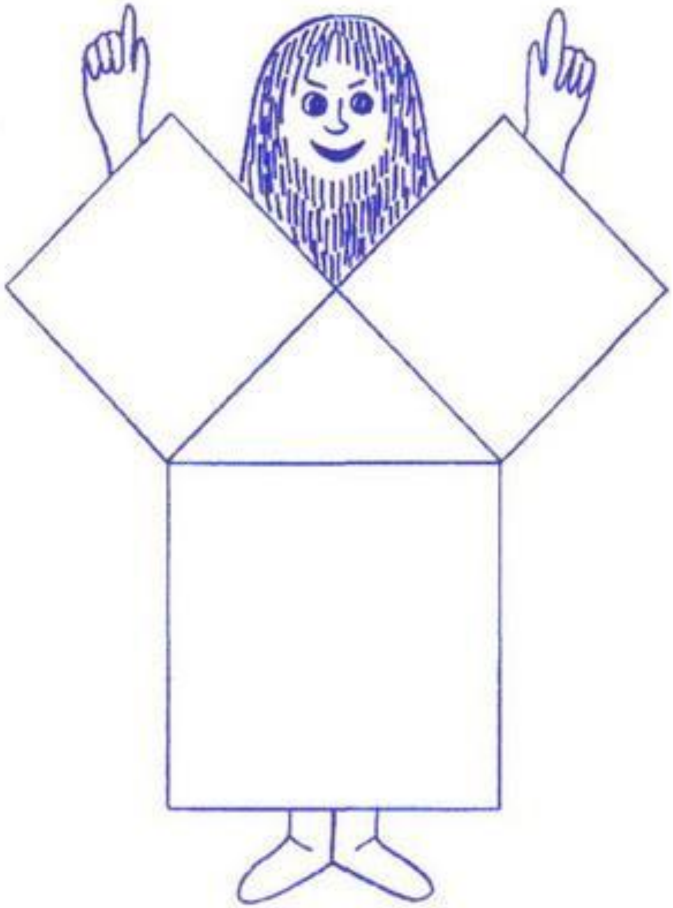
Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

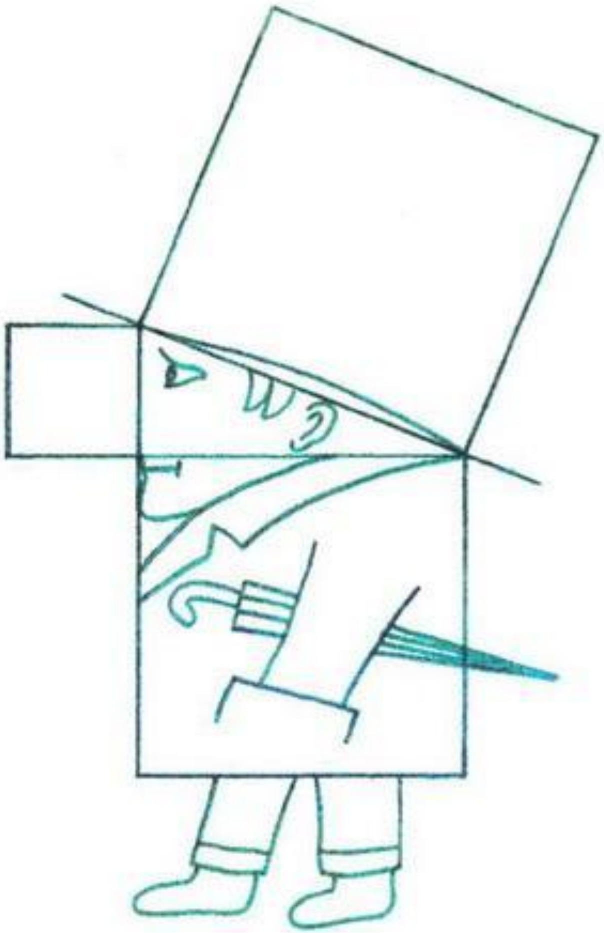
Пифагоровы штаны во все стороны равны



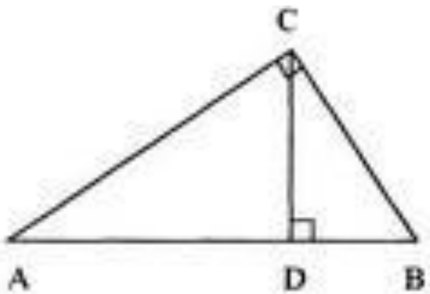


Шаржи





Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Доказательство.

Проведём высоту CD из вершины прямого угла C.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе, поэтому

$$\text{из } \Delta ACD \ \cos A = \frac{AD}{AC}, \text{ а из } \Delta ABC \ \cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Так как равны левые части этих равенств, то равны и правые, следовательно, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

Отсюда, по свойству пропорции, $\underline{AC^2 = AD \cdot AB}$.

Аналогично, из ΔBCD $\cos B = \frac{DB}{BC}$, а из ΔABC $\cos B = \frac{BC}{AB}$.

Так как равны левые части этих равенств, то равны и правые, следовательно, $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}$.

Отсюда, по свойству пропорции, $\underline{BC^2 = DB \cdot AB}$.

Сложим почленно полученные равенства, и вынесем общий множитель за скобки:

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB = AB(\underbrace{AD + DB}_{AB}) = AB \cdot AB = AB^2.$$

Получили $\underline{AB^2 = AC^2 + BC^2}$.

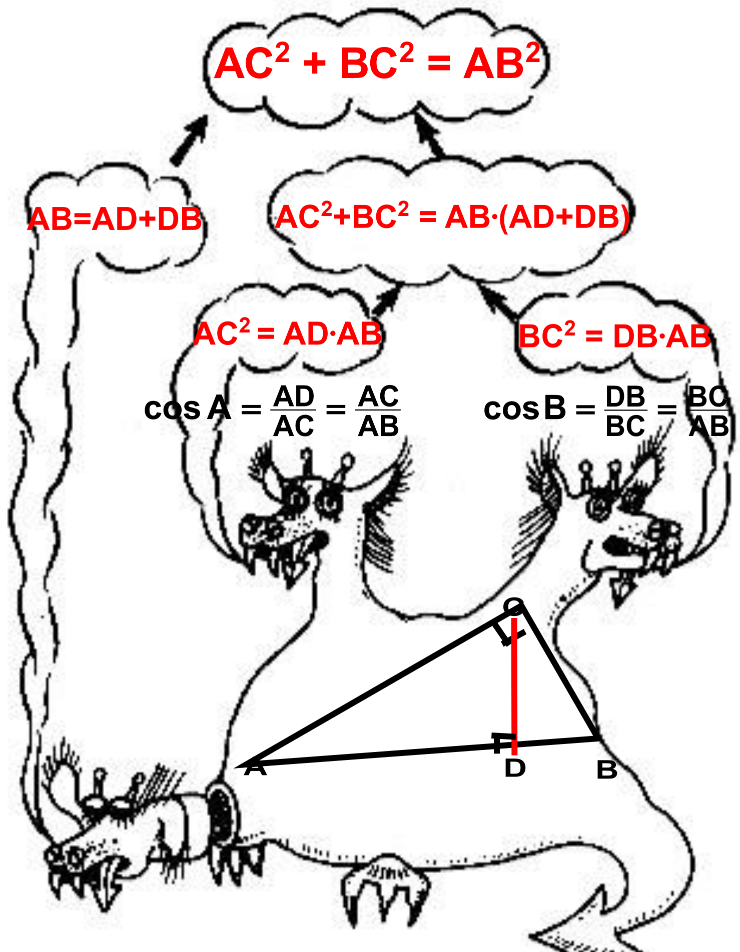
Теорема в стихах

Итак,

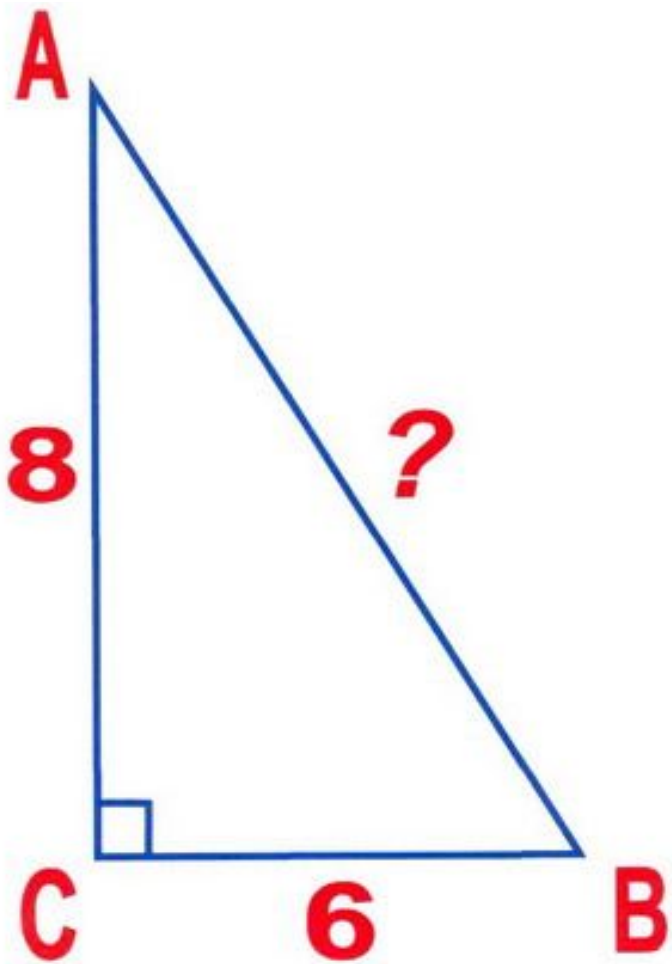
Если дан нам треугольник
И притом с прямым углом,
То квадрат гипотенузы
Мы всегда легко найдём:
Катеты в квадрат возводим,
Сумму степеней находим –
И таким простым путём
К результату мы придём.

Ч.т.д.

Рисунок – опорный сигнал



Задача



Р е ш е н и е

Δ АВС – прямоугольный с гипотенузой АВ, по теореме Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$,

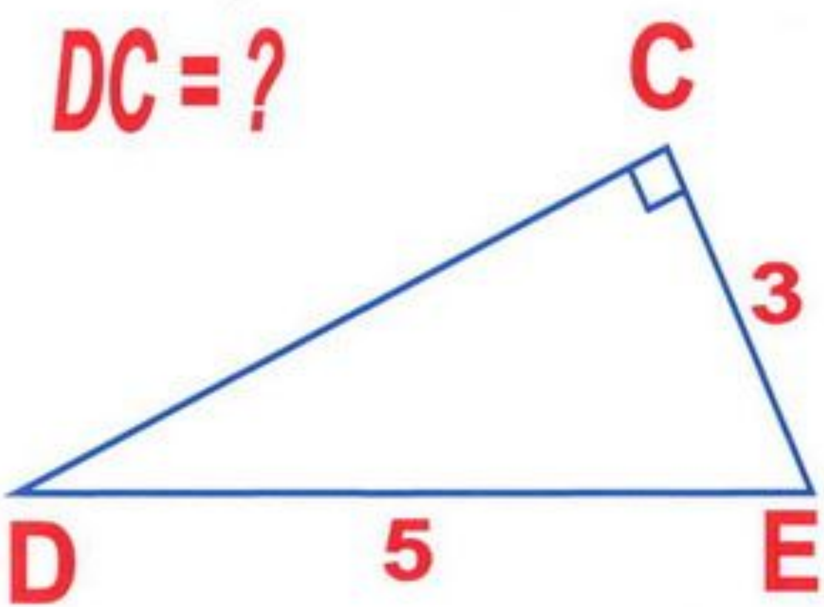
$AB^2 = 8^2 + 6^2$,

$AB^2 = 64 + 36$,

$AB^2 = 100$,

$\underline{AB = 10}$.

Задача



Р е ш е н и е

Δ DCE – прямоугольный с гипотенузой DE, по теореме Пифагора:

$DE^2 = DC^2 + CE^2$,

$DC^2 = DE^2 - CE^2$,

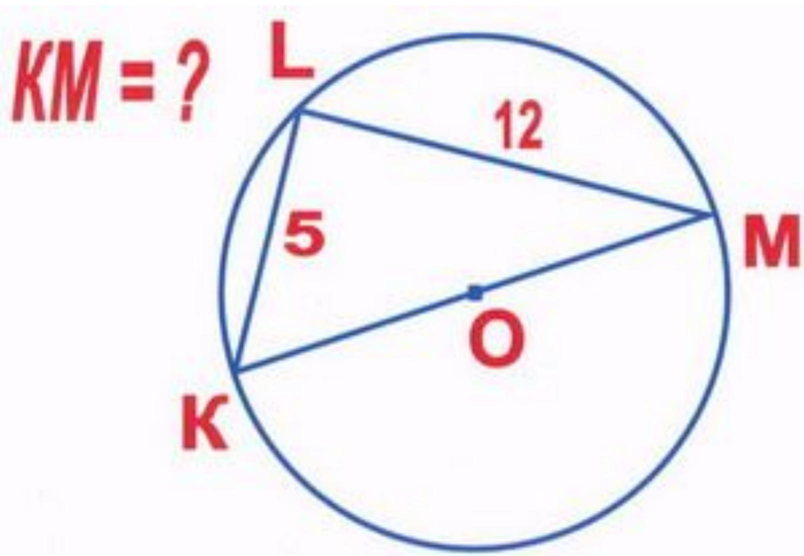
$DC^2 = 5^2 - 3^2$,

$DC^2 = 25 - 9$,

$DC^2 = 16$,

$\underline{DC = 4}$.

Задача



Р е ш е н и е

∠ KLM вписан в окружность и опирается на диаметр КМ. Так как вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые, то ∠ KLM − прямой. Значит, ∆ KLM – прямоугольный. По теореме Пифагора для ∆ KLM с гипотенузой КМ:

$KM^2 = KL^2 + KM^2$,

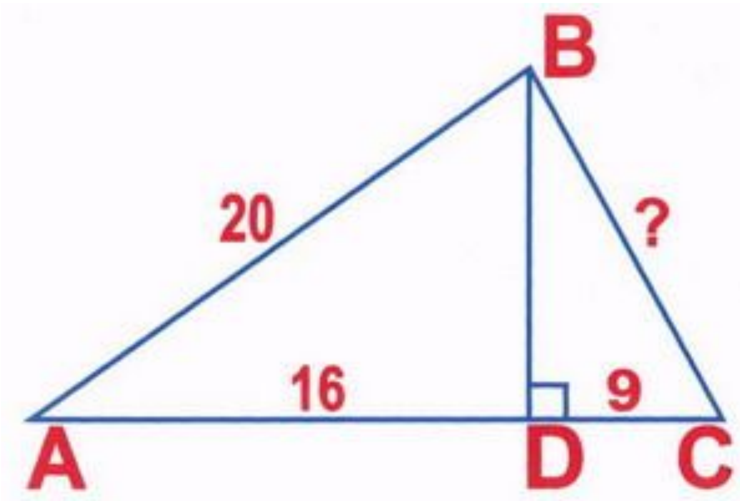
$KM^2 = 5^2 + 12^2$,

$KM = 25 + 144$,

$KM = 169$,

<u>$KM = 13$.</u>

Задача. Высота, опущенная из вершины В ΔАВС, делит сторону АС на отрезки, равные 16 см и 9 см. Найдите сторону ВС, если сторона АВ равна 20 см.



Д а н о: Δ ABC, BD ⊥ AC, AB = 20 см,
AD = 16 см, DC = 9 см.

Н а й т и: BC.

Р е ш е н и е

1) По условию задачи BD ⊥ AC, значит,
Δ ABD и Δ CBD – прямоугольные.

2) По теореме Пифагора для Δ ABD:
$AB^2 = AD^2 + BD^2$, отсюда $BD^2 = AB^2 – AD^2$,

$BD^2 = 20^2 – 16^2$,

$BD^2 = 400 – 256$,

$BD^2 = 144$,

<u>BD = 12 см</u>.

3) По теореме Пифагора для Δ CBD: $BC^2 = BD^2 + DC^2$, отсюда

$BC^2 = 12^2 + 9^2$,

$BC^2 = 144 + 81$,

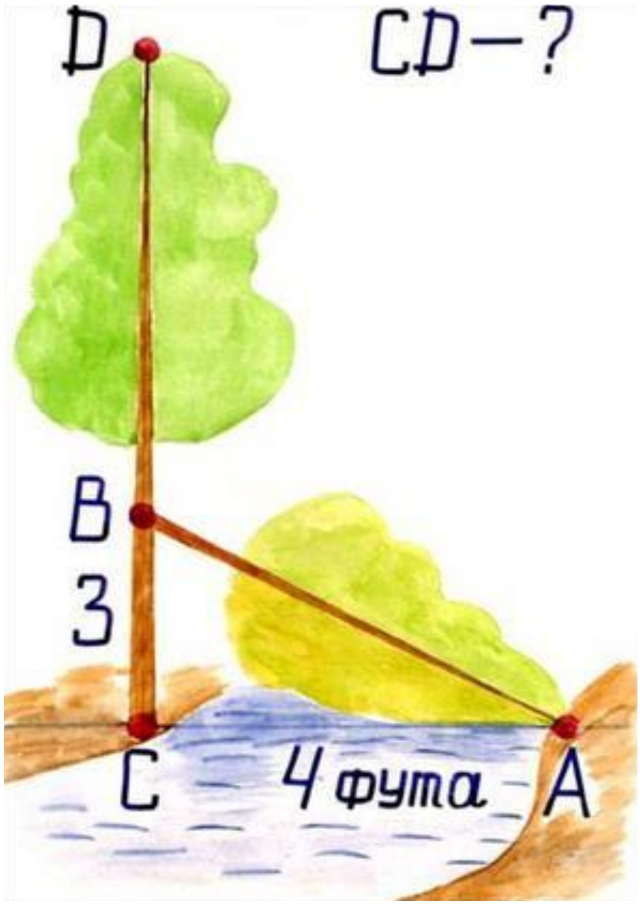
$BC^2 = 225$,

<u>BC = 15см</u>.

О т в е т: BC = 15 см.

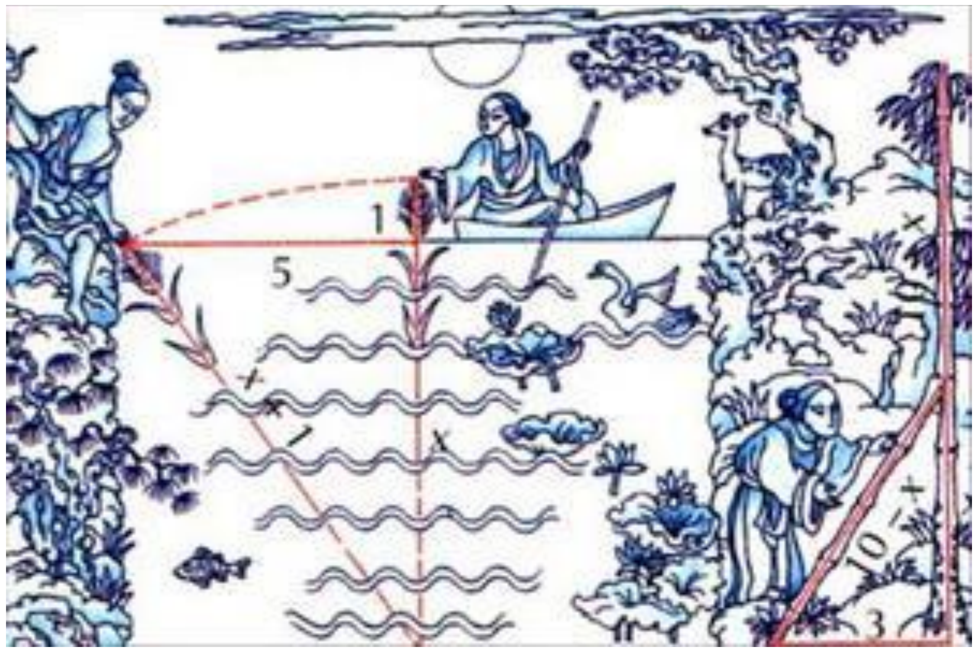
З а м е ч а н и е. На втором этапе решения достаточно было найти BD^2 и подставить его значение в равенство $BC^2 = BD^2 + DC^2$.

Задача индийского математика *XII* века Бхаскары



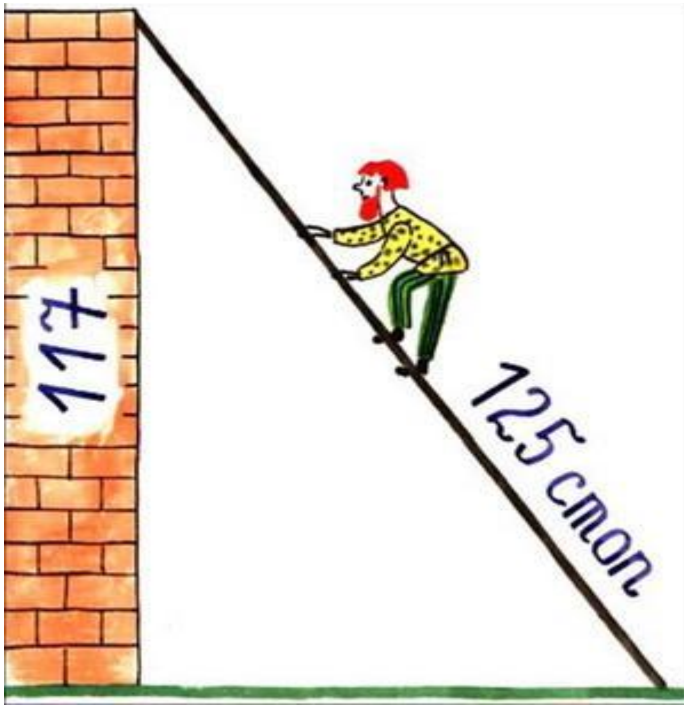
На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.
Бедный тополь упал. И угол прямой
С теченьем реки его ствол составлял.
Запомни теперь, что в этом месте река
В четыре лишь фута была широка
Верхушка склонилась у края реки.
Осталось три фута всего от ствола,
Прошу тебя, скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?»

Задача из китайской «Математики в девяти книгах»



Имеется водоем со стороной в 1 чжан = 10 чи. В центре его растет камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснётся его. Спрашивается: какова глубина воды и какова длина камыша?

Задача из учебника «Арифметика» Леонтия Магницкого



Случися некому человеку к стене лестницу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обреете лестницу долготью 125 стоп. И ведати хочет, колико стоп сея лестницы нижний конец от стены отстояти имать.

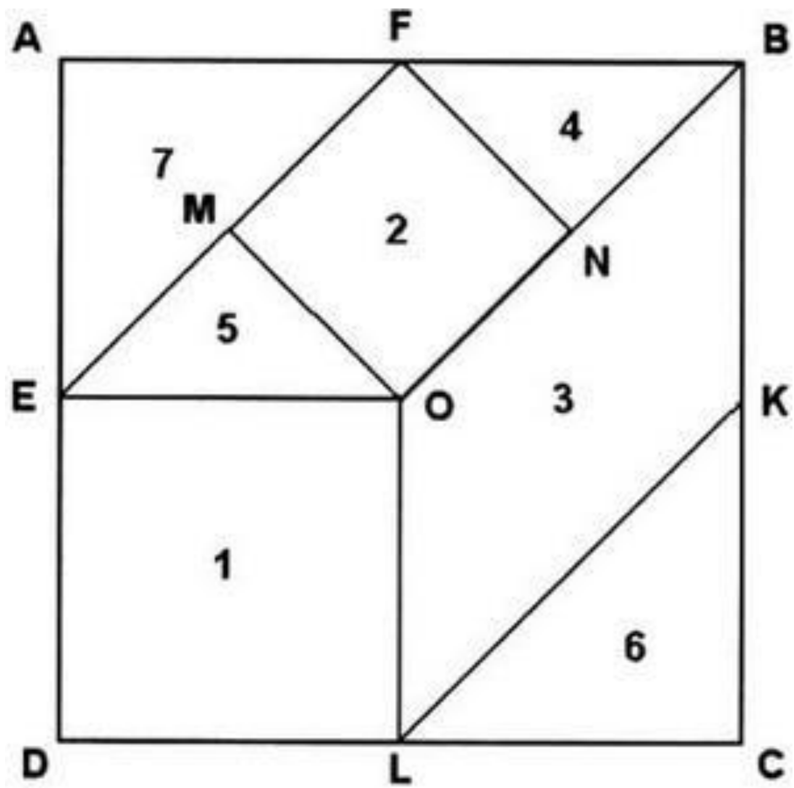
Пентаграмма

Мефистофель*:* Нет, трудновато выйти мне теперь,
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст*:* Не пентаграмма ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель*:* Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, - и я свободно мог вскочить.

Пифагорова головоломка



Из семи частей квадрата составить снова квадрат, прямоугольник, равнобедренный треугольник, трапецию. Квадрат разрезается так:

E, F, K, L – середины сторон квадрата,

O – центр квадрата, OM ⊥ EF, NF ⊥ EF.

Автор:Гумжачева А.Ш.