

# Теорема Пифагора

История,  
доказательства,  
применение.

# Содержание

- Введение
- История теоремы
- Неалгебраические доказательства теоремы
- Алгебраические доказательства теоремы
- Применение теоремы
- Заключение
- Литература

# Введение

Трудно найти человека, у которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с теоремой Пифагора. В самом деле, теорема Пифагора проста, но не очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Но, кроме того, теорема Пифагора имеет огромное значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу, и тот факт, что существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.), свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций. Открытие теоремы Пифагором окружено ореолом красивых легенд. Сегодня теорема Пифагора обнаружена в различных частных задачах и чертежах: и в египетском треугольнике в папирусе времен фараона Аменемхета первого (ок. 2000 до н.э.), и в вавилонских клинописных табличках эпохи царя Хаммурапи (XVIII в. до н.э.), и в древнеиндийском геометрическо-теологическом трактате VI - V вв. до н.э. «Сутьва сутра» («Правила веревки»). В древнейшем китайском трактате «Чжоуби суань цзинь», время создания которого точно не известно, утверждается, что в XII в. до н.э. китайцы знали свойства египетского треугольника, а к VI в. до н.э.— и общий вид теоремы. Несмотря на все это, имя Пифагора столь прочно сплавилось.



Мыслитель,  
математик,  
философ.

## **ПИФАГОР**

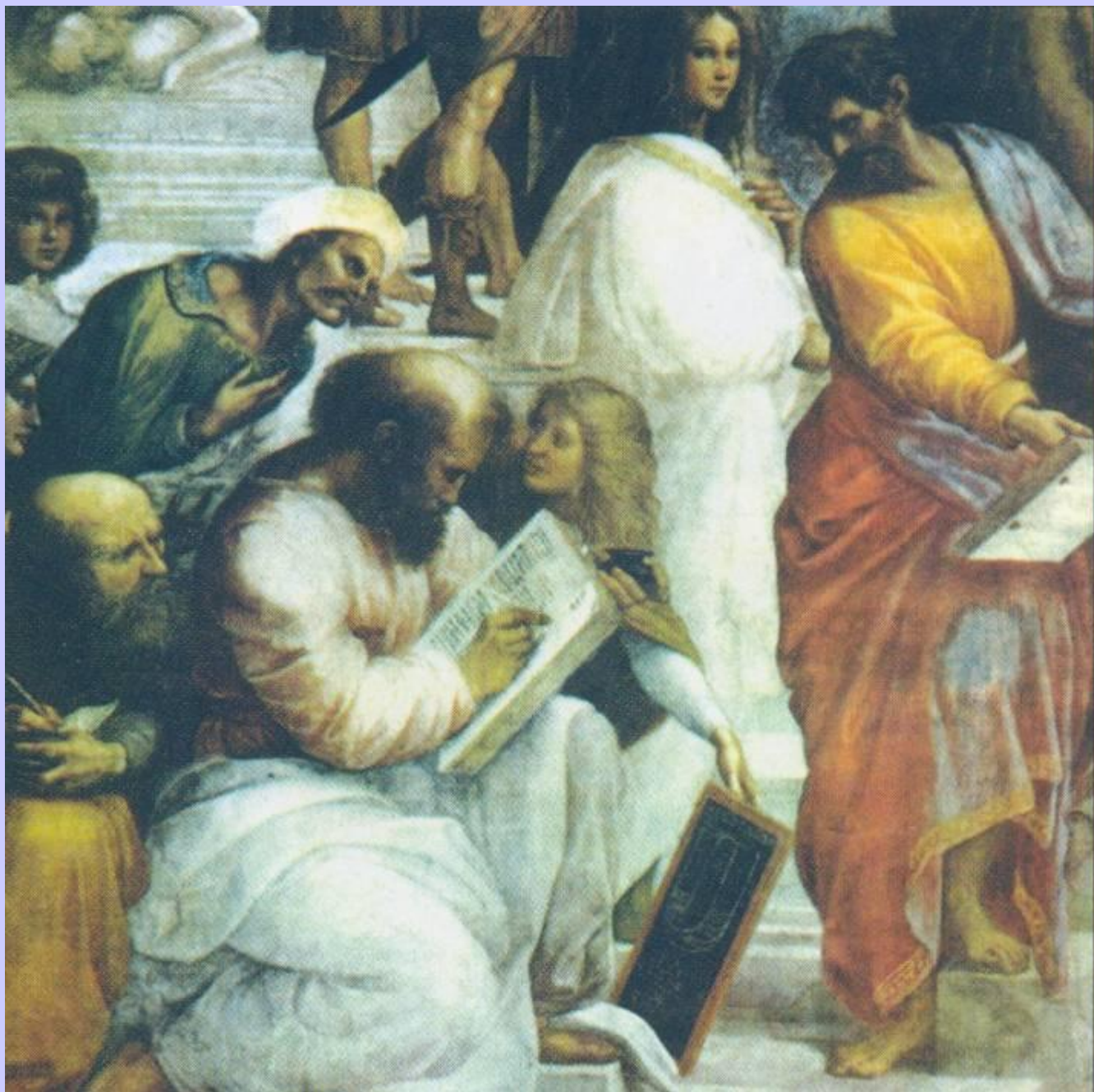
*(от 570 – 500 г.г. до н. э.)*

Письменных документов о Пифагоре Самосском не осталось, а по более поздним свидетельствам трудно восстановить картину его жизни и достижений. Известно, что Пифагор покинул свой родной остров Самос в Эгейском море у берегов Малой Азии в знак протеста против тирании правителя и уже в зрелом возрасте (по преданию 40 лет) появился в греческом городе Кротоне на юге Италии. Пифагор и его последователи – пифагорейцы – образовали тайный союз, игравший немалую роль в жизни греческих колоний в Италии. Пифагорейцы узнавали друг друга по звёздному пятиугольнику – пентаграмме.

На учение Пифагора большое влияние оказала философия и религия Востока. Он путешествовал по странам Востока: был в Египте и в Вавилоне. Там Пифагор познакомился и с восточной математикой. Математика стала частью его учения, и важнейшей частью. Пифагор впервые разделил числа на чётные и нечётные, простые и составные, ввёл понятия фигурного числа. В его школе были подробно рассмотрены пифагоровы тройки натуральных чисел, у которого квадрат равнялся сумме квадратов двух других. К числам (а он имел в виду лишь натуральные) он хотел свести весь мир, и математику в частности. Но в самой школе Пифагора было сделано открытие, нарушавшее эту гармонию. Было показано, что  $\sqrt{2}$  не является рациональным числом, то есть не выражается через натуральные числа.

Естественно, что геометрия у Пифагора была подчинена арифметике, это ярко проявлялось в теореме, носящей его имя и ставшей в дальнейшем основой применения численных методов в геометрии.





**Пифагор  
Фрагмент фрески  
Рафаэля  
«Афинская школа».**

**1511 г.**

# История теоремы

Исторический обзор начинается с древнего Китая. Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чупей. В этом сочинении так говорится о пифагоровым треугольнике со сторонами 3, 4 и 5: *«Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4»*. В этой же книге предложен рисунок, который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Басхары. Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство  $3^2+4^2=5^2$  было известно уже египтянам еще около 2300 г. до н. э. во времена царя *Аменхета I* (согласно папирусу 6619 Берлинского музея). По мнению Кантора гарпедонапты, или «натягиватели веревок», строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5. Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте, относимом ко времени *Хаммураби*, т. е. к 2000 г. до н.э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере, в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой на критическом изучении греческих источников, Вандер-Варден (голландский математик) сделал следующий вывод: *«Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку»*. Геометрия, у индусов, как и у египтян и вавилонян, была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около 18 века до н. э. В первом русском переводе евклидовых «Начал», сделанном Ф. И. Петрушевским, теорема Пифагора изложена так: *«В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противоположной прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол»*.

В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге.

# Неалгебраические доказательства

## 1.1 С помощью мозаики

*«Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах».*

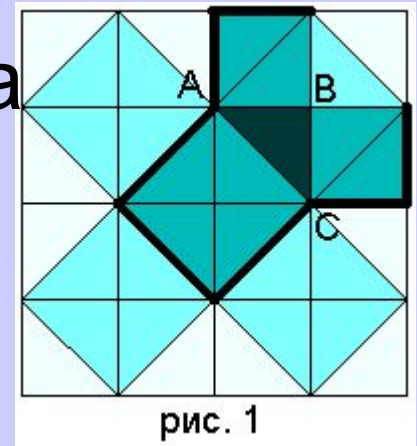


рис. 1

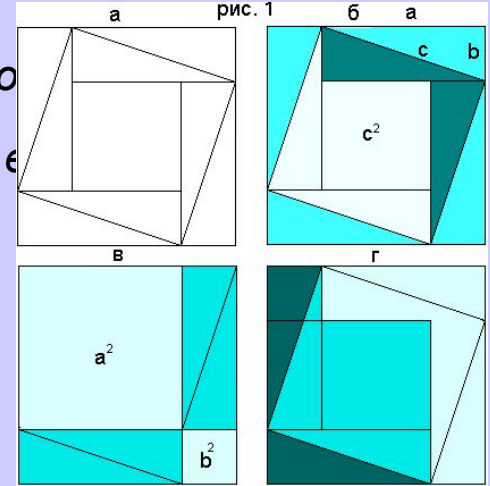
Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. Достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 1), чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для  $\triangle ABC$ : квадрат, построенный на гипотенузе  $AC$ , содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах, — по два. Теорема доказана.



# Неалгебраические доказательства

## 1.2. Древнекитайское доказательство

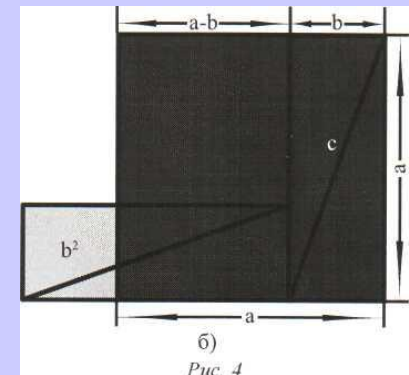
Математические трактаты Древнего Китая дошли до нас в редакции II в. до н.э. Дело в том, что в 213 г. до н.э. китайский император Ши Хуанди, стремясь ликвидировать прежние традиции, приказал сжечь все древние книги. Во II в. до н.э. в Китае была изобретена бумага и одновременно начинается воссоздание древних книг. Так возникла тематика «девяяти книгах» — главное из сохранившихся математике — астрономических сочинений в книге «Математики» помещен чертеж (рис. 2а), доказывающий теорему Пифагора. Ключ к этому доказательству подобрать нетрудно. В самом деле, на древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$  уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной  $a+b$ , а внутренний — квадрат со стороной  $c$ , построенный на гипотенузе (рис. 2б). Если квадрат со стороной  $c$  вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника (рис. 2в), то ясно, что образовавшаяся пустота, с одной стороны, равна  $c^2$ , а с другой —  $a^2+b^2$ , т.е.  $c^2=a^2+b^2$ . Теорема доказана. При таком доказательстве построения внутри квадрата на гипотенузе, которые видны на древнекитайском чертеже (рис. 2а), не используются. По-видимому, древнекитайские математики имели другое доказательство. Именно если в квадрате со стороной  $c$  два заштрихованных треугольника (рис. 2б) отрезать и приложить гипотенузами к двум другим гипотенузам (рис. 2г), то легко обнаружить, что полученная фигура, которую иногда называют «креслом невесты», состоит из двух квадратов со сторонами  $a$  и  $b$ , т.е.  $c^2=a^2+b^2$ .



# Неалгебраические доказательства

## 1.3. Древнеиндийское доказательство

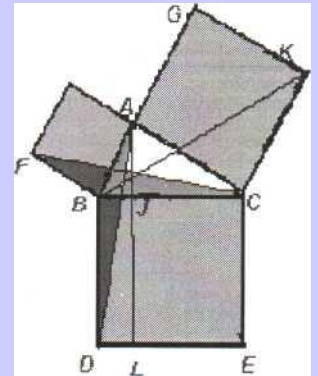
Древней Индии заметили, что для доказательства теоремы Пифагора достаточно использовать внутреннюю часть древнекитайского чертежа. В написанном на пальмовых листьях трактате «Сиддханта широмани» («Венец знания») крупнейшего индийского математика XII в. Бхаскары помещен чертеж (рис. 4а) с характерным для индийских доказательств, словом «смотри!». Как видим, прямоугольные треугольники уложены здесь гипотенузой наружу и квадрат с 2 перекладывается в «кресло невесты»  $a \cdot a - b \cdot b$  (рис. 4б). Заметим, что частные случаи теоремы Пифагора (например, построение квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата) встречаются в древнеиндийском трактате «Сульва сутра» (VII-V вв. до н.э.).



# Неалгебраические доказательства

## 1.5. Доказательство Евклида

**Доказательство Евклида** приведено в предложении 47 первой книги «Начал». На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника  $ABC$  строятся соответствующие квадраты (рис. 5) и доказывается, что прямоугольник  $BJLD$  равновелик квадрату  $ABFH$ , а прямоугольник  $ICEL$  — квадрату  $ACKG$ . Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затушеванные на рисунке треугольники  $ABD$  и  $BFC$  равны по двум сторонам и углу между ними:  $FB=AB$ ,  $BC=BD$  и  $\angle FBC = \angle ABC = \angle ABD$ . Но  $S_{ABD} = 1/2 S_{BJLD}$ , так как у треугольника  $ABD$  и прямоугольника  $BJLD$  общее основание  $BD$  и общая высота  $LD$ . Аналогично  $S_{BFC} = 1/2 S_{ABFH}$  ( $BF$  — общее основание,  $AB$  — общая высота). Отсюда учитывая, что  $S_{ABD} = S_{BFC}$ , имеем  $S_{BJLD} = S_{ABFH}$ . Аналогично, используя равенство треугольников  $BCK$  и  $ACE$ , доказывается, что  $S_{ICEL} = S_{ACKG}$ . Итак,  $S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{BJLD} + S_{ICEL} = S_{BCED}$ , что и требовалось доказать. Доказательство Евклида в сравнении древнекитайским или древнеиндийским выглядит чрезмерно сложным. По этой причине его нередко называли «ходульным» и «надуманным». Но такое мнение поверхностно. Теорема Пифагора у Евклида является заключительным звеном в цепи предложений 1-й книги «Начал». Для того чтобы логически безупречно построить эту цепь, чтобы каждый шаг доказательства был основан на ранее доказанных предложениях, Евклиду нужен был именно выбранный им путь.



# Алгебраическое доказательство

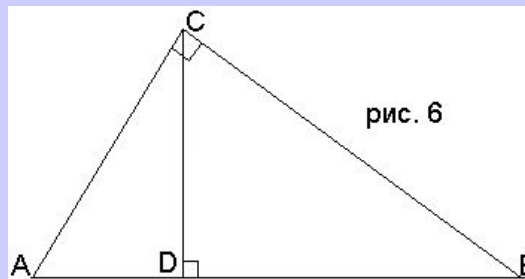
Пусть  $ABC$  — данный прямоугольный с треугольник с прямым углом  $C$ . Проведем высоту  $CD$  из вершины прямого угла  $C$  {рис. 6}.

По определению косинуса угла (косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе)  $\cos A = AD/AC = AC/AB$ . Отсюда  $AB \times AD = AC^2$ .

Аналогично  $\cos B = BD/BC = BC/AB$ . Отсюда  $AB \times BD = BC^2$ .

Складывая полученные равенства почленно, и замечая, что  $AD + DB = AB$ , получим:

$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$ . Теорема доказана.



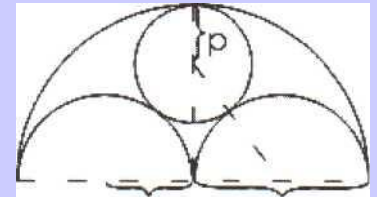


# Применение

## 1.1. Строительство

### Окно

$r=b/4$   $R=b/2$  В романской архитектуре часто встречается мотив представленный на рисунке. Если  $b$  по-прежнему обозначает, ширину окна, то радиусы полуокружностей будут равны  $R=b/2$  и  $r=b/4$ . Радиусу внутренней окружности можно вычислить из прямоугольного треугольника, изображенного на рис. пунктиром. Гипотенуза этого треугольника, проходящая через точку касания окружностей, равна  $b/4+p$ , один катет равен  $b/4$ , а другой  $b/2-p$ .

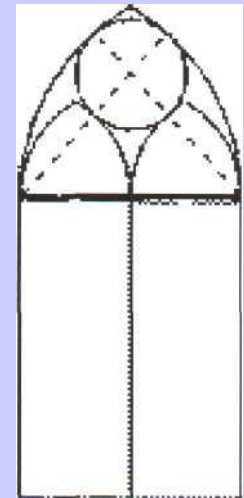


По теореме Пифагора имеем:  
 $(b/4+p)^2 = (b/4)^2 + (b/2-p)^2$  или  $b/16 + b \cdot p/2 + p^2 = b/16 + b/4 - b \cdot p + p^2$ ,  
откуда  $b \cdot p/2 = b/4 - b \cdot p$ .

Разделив на  $b$  и приводя подобные члены, получим:

$$(3/2)p = b/4, p = b/6.$$

В зданиях готического и романского стиля верхние части окон расчленяются каменными ребрами, которые не только играют роль орнамента, но и способствуют прочности окон. На рисунке представлен простой пример такого окна в готическом стиле. Способ построения его очень прост: из рисунка легко найти центры шести дуг окружностей, радиусы которых равны ширине окна ( $b$ ) для наружных дуг и половине ширины ( $b/2$ ), для внутренних дуг. Остается еще полная окружность, касающаяся четырех дуг. Так как она заключена между двумя концентрическими окружностями, то ее диаметр равен расстоянию между этими окружностями, т. е.  $b/2$  и, следовательно, радиус равен  $b/4$ . Тогда становится ясным и положение ее центра. В рассмотренном примере радиусы находились без всяких затруднений.



# Применение

## 1.1. Строительство

### *Крыша*

В доме задумано построить двускатную крышу (форма в сечении). Какой длины должны быть стропила, если изготовлены балки  $AC=8$  м, и  $AB=BF$ .

*Решение:*

Треугольник  $ADC$ — равнобедренный  $AB=BC=4$  м,  $BF=4$  м, Если предположить, что  $FD=1,5$  м, тогда:

А) Из треугольника  $DBC$ :  $DB=2,5$  м  $DC=\sqrt{4^2-2,5^2}=\sqrt{16-6,25}=\sqrt{9,75}\approx 3,1$  м

Б) Из треугольника  $ABF$ :  $AF=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}\approx 5,7$  м

### *Молниеотвод*

Молниеотвод защищает от молнии все предметы, расстояние до которых от его основания не превышает его удвоенной высоты. *Определить оптимальное положение молниеотвода на двускатной крыше, обеспечивающее наименьшую его доступную высоту.*

*Решение:*

По теореме Пифагора  $h^2 > a^2 + b^2$ , значит  $h > \sqrt{a^2 + b^2}$  Ответ:  $h > \sqrt{a^2 + b^2}$

# Применение

## 1.2. Астрономия

Пусть световой луч проходит путь от точки А к точке В. *Какой путь проходит луч?* Поскольку свет идет туда и обратно одинаковый путь, возникает вопрос: чему равна половина пути, который проходит луч? Если обозначить отрезок АВ символом  $l$ , половину времени как  $t$ , а также обозначив скорость движения света буквой  $c$ , то уравнение примет вид:

$$c \times t = l$$

Это произведение затраченного времени на скорость.

Попробуем взглянуть на то же явление из другой системы отсчета, например, из космического корабля, пролетающего мимо бегающего луча со скоростью  $v$ . При таком наблюдении скорости всех тел изменятся, причем неподвижные тела станут двигаться со скоростью  $v$  в противоположную сторону. Предположим, что корабль движется влево. Тогда две точки, между которыми бегают зайчик, станут двигаться вправо с той же скоростью. Причем, в то время, пока зайчик пробегает свой путь, исходная точка А смещается и луч возвращается уже в новую точку С.

*Вопрос: на сколько успеет сместиться точка, чтобы превратиться в точку С, пока путешествует световой луч,* то есть спросим о половине данного смещения. Если обозначить половину времени путешествия луча буквой  $t'$ , а половину расстояния АС буквой  $d$ , то получим наше уравнение в виде:

$$v \times t' = d$$

Буквой  $v$  обозначена скорость движения космического корабля.

*Другой вопрос: какой путь при этом пройдет луч света?* Чему равна половина этого пути? Чему равно расстояние до неизвестного объекта? Если обозначить половину длины пути света буквой  $s$ , получим уравнение:

$$c \times t' = s$$

Здесь  $c$  — это скорость света,  $at'$  — это тоже время, которые было рассмотрено формулой выше. Теперь рассмотрим треугольник АВС. Это равнобедренный треугольник, высота которого равна  $l$ , которое было введено при рассмотрении процесса с неподвижной точки зрения. Поскольку движение происходит перпендикулярно  $l$ , то оно не могло повлиять на нее. Треугольник АВС составлен из двух половинок — одинаковы прямоугольных треугольников, гипотенузы которых АВ и ВС должны быть связаны с катетами по теореме Пифагора. Один из катетов — это  $d$ , который был рассчитан только что, а второй катет — это  $s$ , который проходит свет, и который тоже рассчитали. Получаем уравнение:  $s^2 = l^2 + d^2$ .

# Применение

## 1.3. Мобильная связь

В настоящее время на рынке мобильной связи идет большая конкуренция среди операторов. Чем надежнее связь, чем больше зона покрытия, тем больше потребителей у оператора. При строительстве вышки (антенны) часто приходится решать задачу: *какую наибольшую высоту должна иметь антенна, чтобы передачу можно было принимать в определенном радиусе (например, радиусе  $R=200$  км, если известно, что радиус Земли равен 6380 км).*

*Решение:*

Пусть  $AB=x$ ,  $BC=R=200$  км,  $OC=r=6380$  км.  $OB=OA+AB$ , следовательно:  $OB=r+x$ .

Используя теорему Пифагора, получим ответ 2,3 км.



## Заключение

Важность теоремы состоит, прежде всего, в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. К сожалению, невозможно привести все или даже самые красивые доказательства теоремы, однако приведенные примеры убедительно свидетельствуют об огромном интересе сегодня, да и вчера, проявляемом по отношению к ней.

# Литература

1. Акимова С. Занимательная математика Санкт-Петербург.: «Тригон», 1997.
2. Геометрия 7-9: Учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, СБ. Кадомцев и др.-12-е изд.-М.: «Просвещение», 2002.
3. Глейзер Г.И. История математики в школе. - М.: «Просвещение», 1981.
4. Еленьский Ш. По следам Пифагора, М., 1961.
5. Журнал «Математика в школе» № 4, 1991.
6. Литцман В. Теорема Пифагора. М., 1960.
7. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. М., 1990.
8. Энциклопедический словарь юного математика/ Сост. А.П. Савин.- 3-е изд., испр. и доп. - М.: Педагогика-Пресс, 1997.
9. Энциклопедия для детей. Т.П. Математика /Главный редактор М.Д. Аксенова. - М.: «Аванта+»,1998.
10. Я познаю мир: Детская энциклопедия: Математика. - М., 1997.