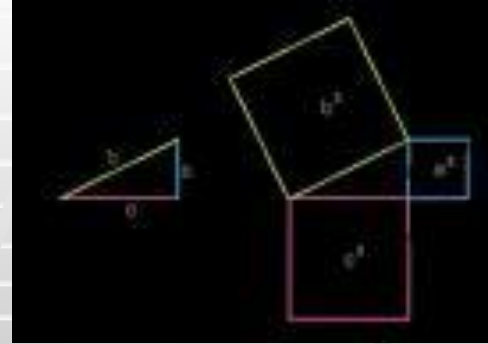


Теорема Пифагора

Различные формулировки

Как известно...



- Теорема Пифагора звучит так: «**В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов**», но...
- Как звучала эта теорема у Евклида: «**В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол**»
- Как звучала у Аннаирици: «**Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол**»

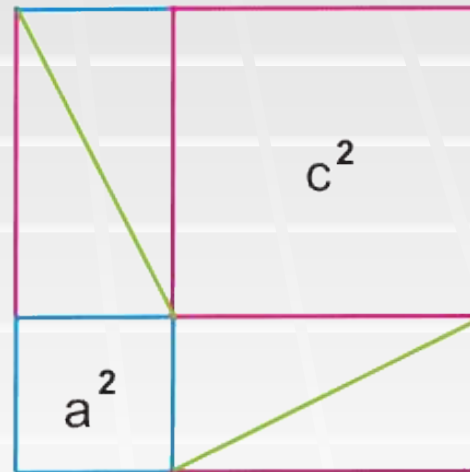
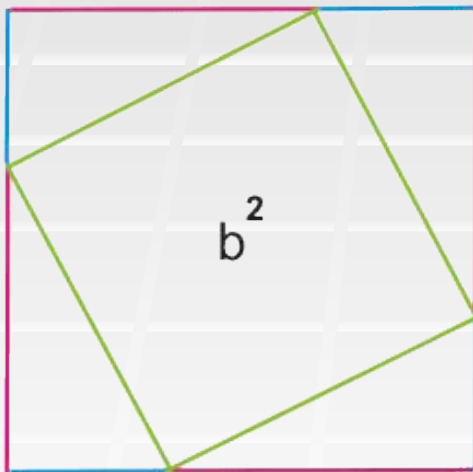
Научное открытие

- В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором. Однако одни полагают, что Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге. Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводит в первой книге своих "Начал". С другой стороны, Прокл утверждает, что доказательство в "Началах" принадлежит самому Евклиду. Как мы видим, история математики почти не сохранила достоверных данных о жизни Пифагора и его математической деятельности. Зато легенда сообщает даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Многим известен сонет Шамиссо:

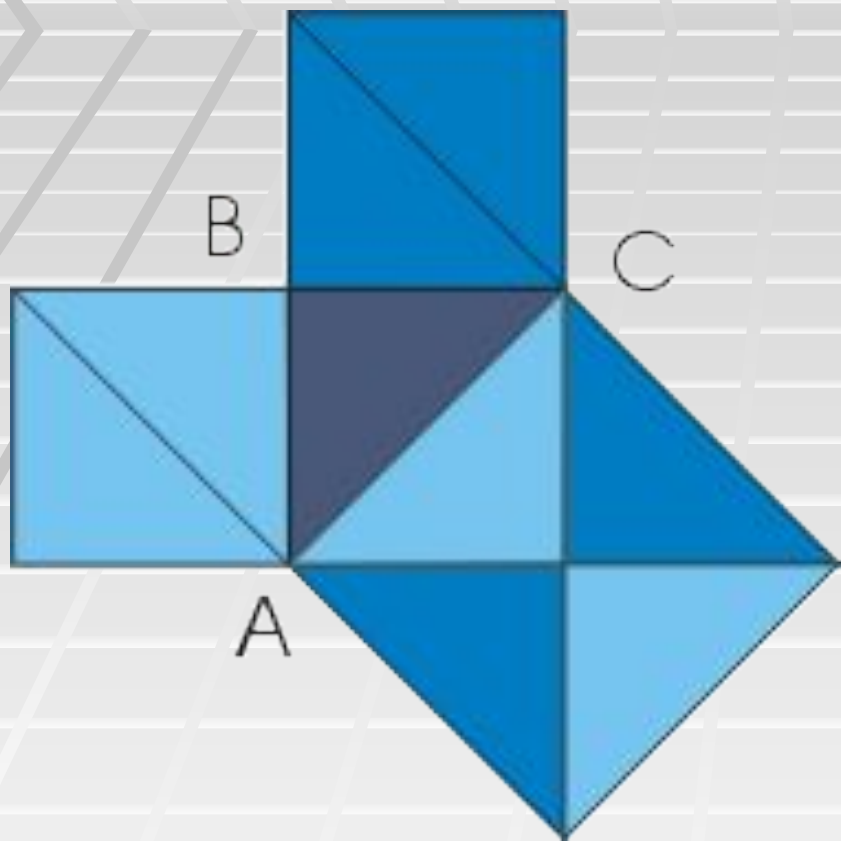


Доказательства теоремы Пифагора

1. Простейшее
2. Метод разложения
3. Метод дополнения
4. Другие...



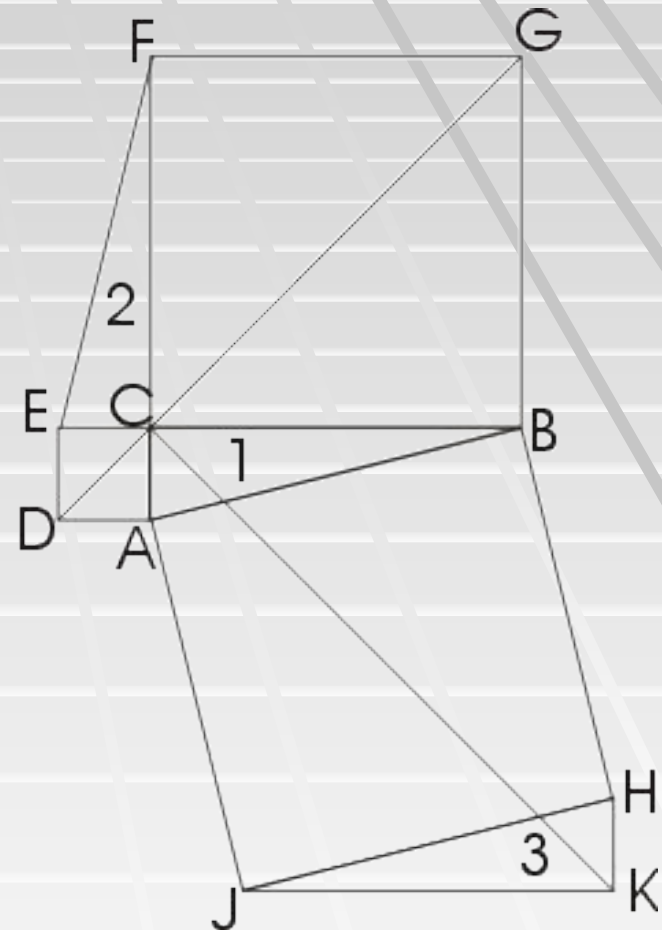
Простейшее доказательство



- Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для треугольника ABC : квадрат, построенный на гипотенузе AC , содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах, - по два.
- **Теорема доказана.**

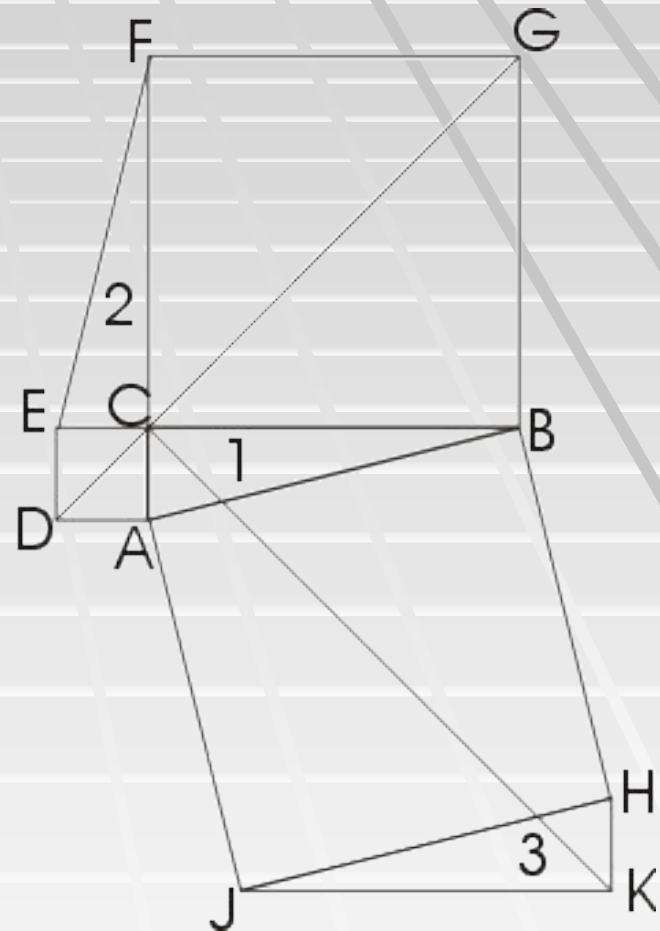
Доказательство методом дополнения

- От двух равных площадей нужно отнять равновеликие части так, чтобы в одном случае остались два квадрата, построенные на катетах, а в другом - квадрат, построенный на гипотенузе. Ведь если в равенствах: $B - A = C$ и $B_1 - A_1 = C_1$. Часть A равновелика части A_1 , а часть B равновелика B_1 , то части C и C_1 также равновелики.



Доказательство методом дополнения

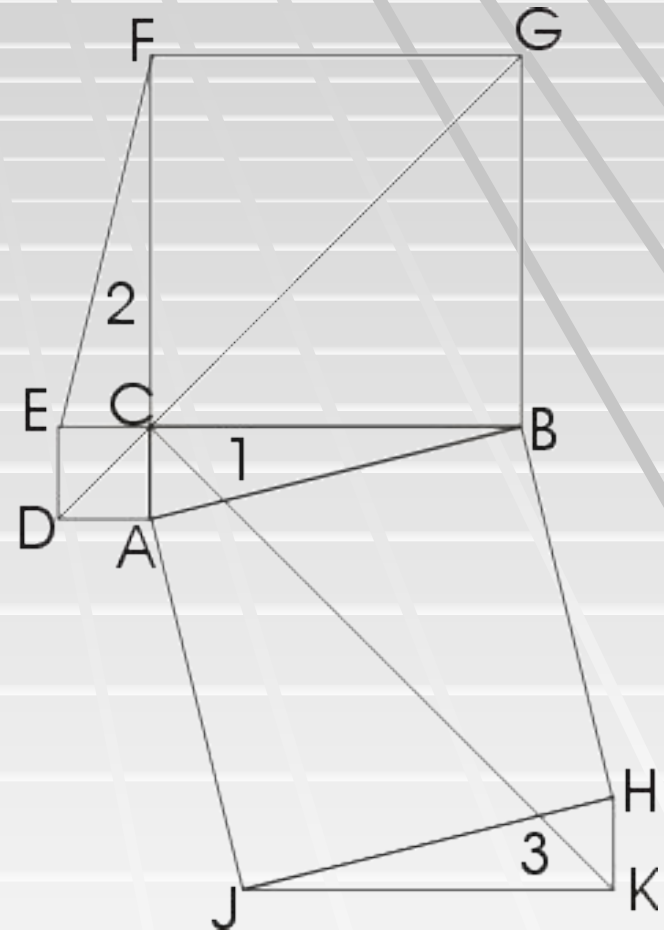
- Поясним этот метод на примере. На рис. к обычной пифагоровой фигуре приставлены сверху и снизу треугольники 2 и 3, равные исходному треугольнику 1. Прямая DG обязательно пройдет через C . Заметим теперь (далее мы это докажем), что шестиугольники $DABGFE$ и $CAJKHB$ равновелики. Если мы от первого из них отнимем треугольники 1 и 2, то останутся квадраты, построенные на катетах, а если от второго шестиугольника отнимем равные треугольники 1 и 3, то останется квадрат, построенный на гипотенузе. Отсюда вытекает, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.



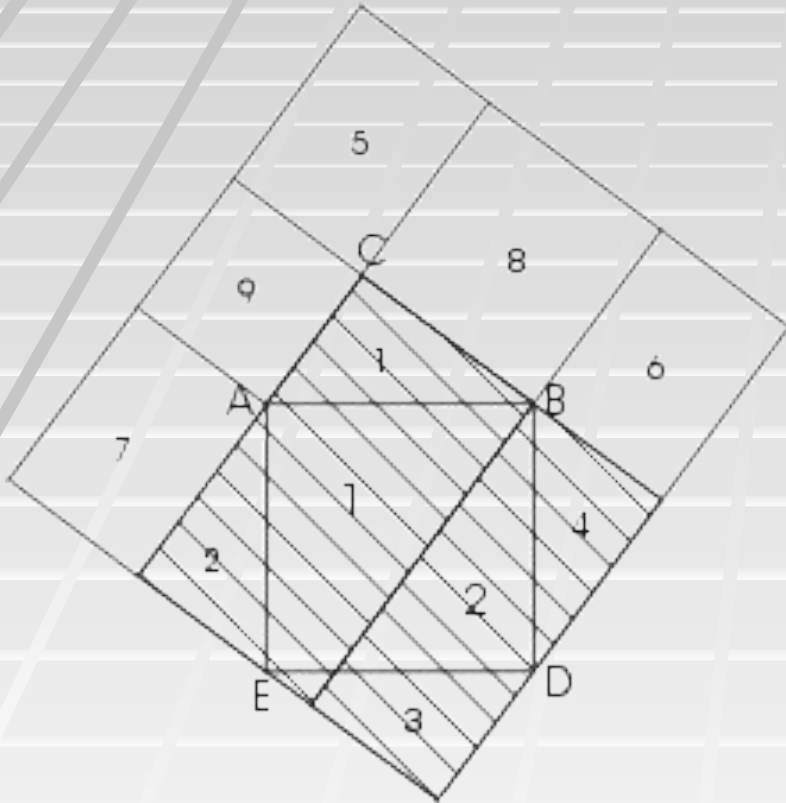
Доказательство методом дополнения

- Остается доказать, что наши шестиугольники равновелики. Заметим, что прямая DG делит верхний шестиугольник на равновеликие части; то же можно сказать о прямой $СК$ и нижнем шестиугольнике. Повернем четырехугольник $DABG$, составляющий половину шестиугольника $DABGFE$, вокруг точки A по часовой стрелке на угол 90° ; тогда он совпадет с четырехугольником $CAJK$, составляющим половину шестиугольника $CAJKHB$. Поэтому шестиугольники $DABGFE$ и $CAJKHB$ равновелики.

Теорема доказана

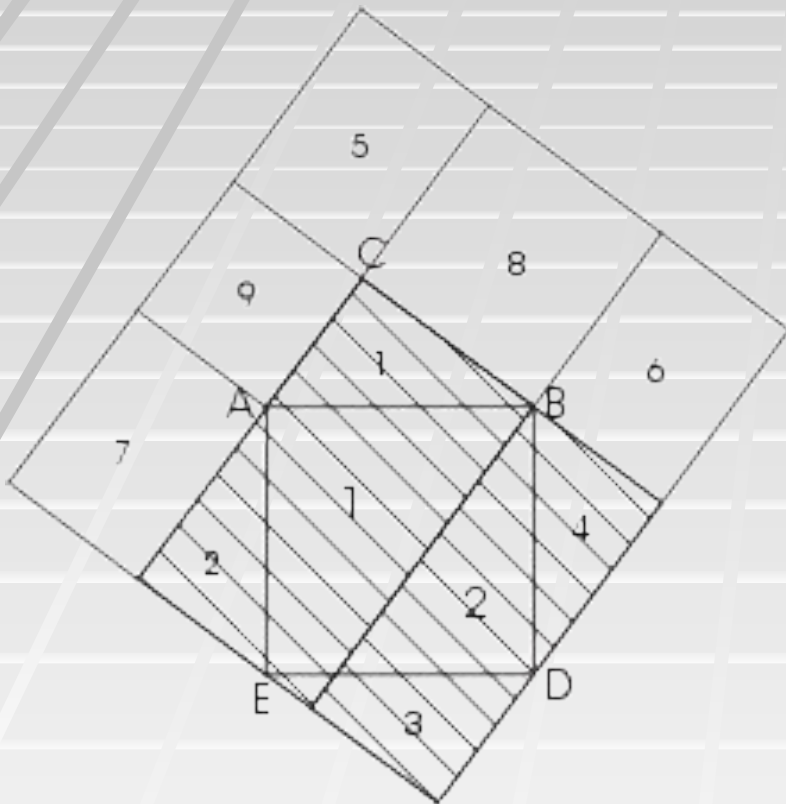


Доказательство методом вычитания



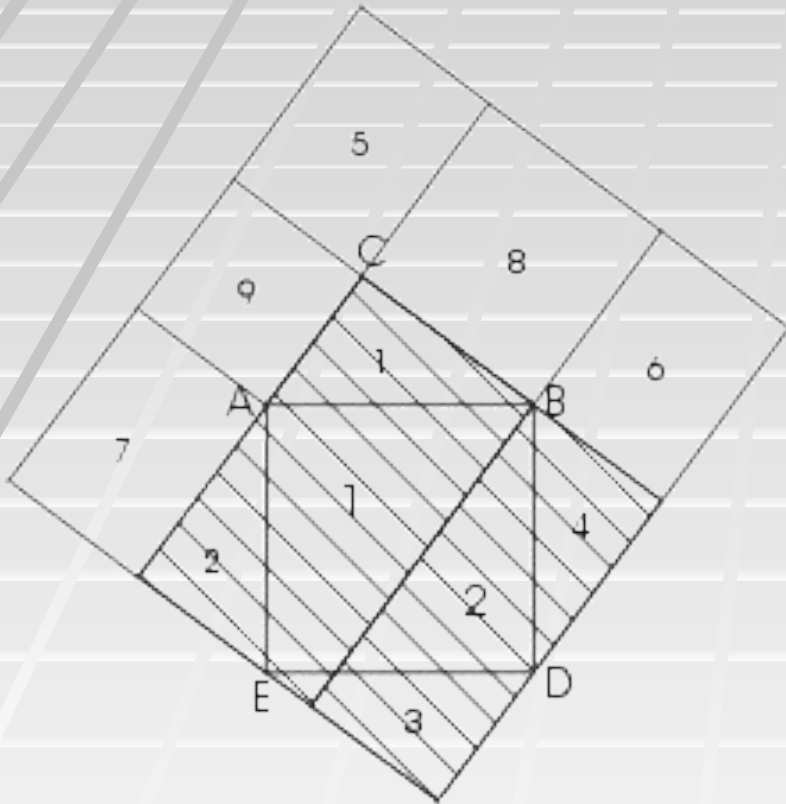
- Знакомый нам чертеж теоремы Пифагора заключим в прямоугольную рамку, направления сторон которой совпадают с направлениями катетов треугольника. Продолжим некоторые из отрезков фигуры так, как указано на рисунке, при этом прямоугольник распадается на несколько треугольников, прямоугольников и квадратов. Выбросим из прямоугольника сначала несколько частей так чтобы остался лишь квадрат, построенный на гипотенузе. Эти части следующие:

Доказательство методом вычитания



- треугольники 1, 2, 3, 4;
прямоугольник 5;
прямоугольник 6 и квадрат 8;
прямоугольник 7 и квадрат 9;
Затем выбросим из
прямоугольника части так,
чтобы остались только
квадраты, построенные на
катетах. Этими частями
будут:
прямоугольники 6 и 7;
прямоугольник 5;
прямоугольник 1(заштрихован);
прямоугольник 2(заштрихован);

Доказательство методом вычитания

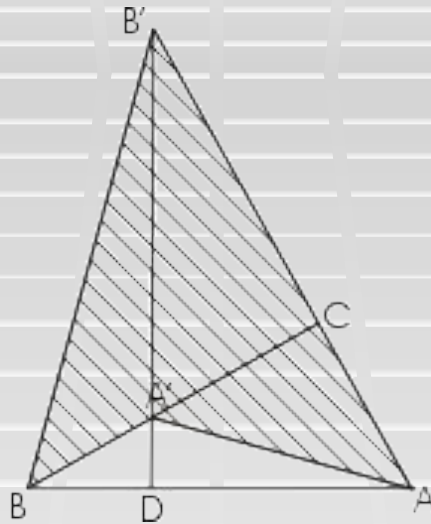


Нам осталось лишь показать, что отнятые части равновелики. Это легко видеть в силу расположения фигур. Из рисунка ясно, что:

- прямоугольник 5 равновелик самому себе;
- четыре треугольника 1,2,3,4 равновелики двум прямоугольникам 6 и 7;
- прямоугольник 6 и квадрат 8, взятые вместе, равновелики прямоугольнику 1 (заштрихован);;
- прямоугольник 7 вместе с квадратом 9 равновелики прямоугольнику 2 (заштрихован);

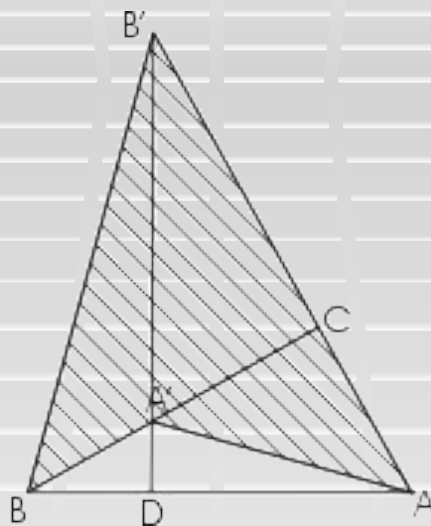
Доказательство закончено

Доказательство Хоукинса



- Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C повернем на 90° так, чтобы он занял положение $A'B'C'$. Продолжим гипотенузу $A'B'$ за точку A' до пересечения с линией AB в точке D . Отрезок $B'D$ будет высотой треугольника $V'AB$. Рассмотрим теперь заштрихованный четырехугольник $A'AB'B$. Его можно разложить на два равнобедренных треугольника CAA' и CBV' (или на два треугольника $A'B'A$ и $A'B'B$).

Доказательство Хоукинса



$$S_{CAA'} = b^2/2, \quad S_{CBB'} = a^2/2$$

$$S_{A'AB'B} = (a^2 + b^2)/2$$

Треугольники $A'B'A$ и $A'B'B$ имеют общее основание c и высоты DA и DB , поэтому :

- $S_{A'AB'B} = c \cdot DA/2 + c \cdot DB/2 = c(DA + DB)/2 = c^2/2$

Сравнивая два полученных выражения для площади, получим:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Теорема доказана.

Векторное доказательство

Пусть ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C , построенный на векторах. Тогда справедливо векторное равенство: $b+c=a$

откуда имеем

$$c = a - b$$

возводя обе части в квадрат, получим

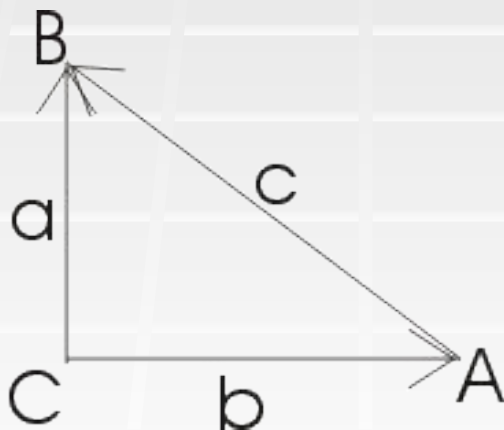
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Так как a перпендикулярно b , то $ab=0$, откуда

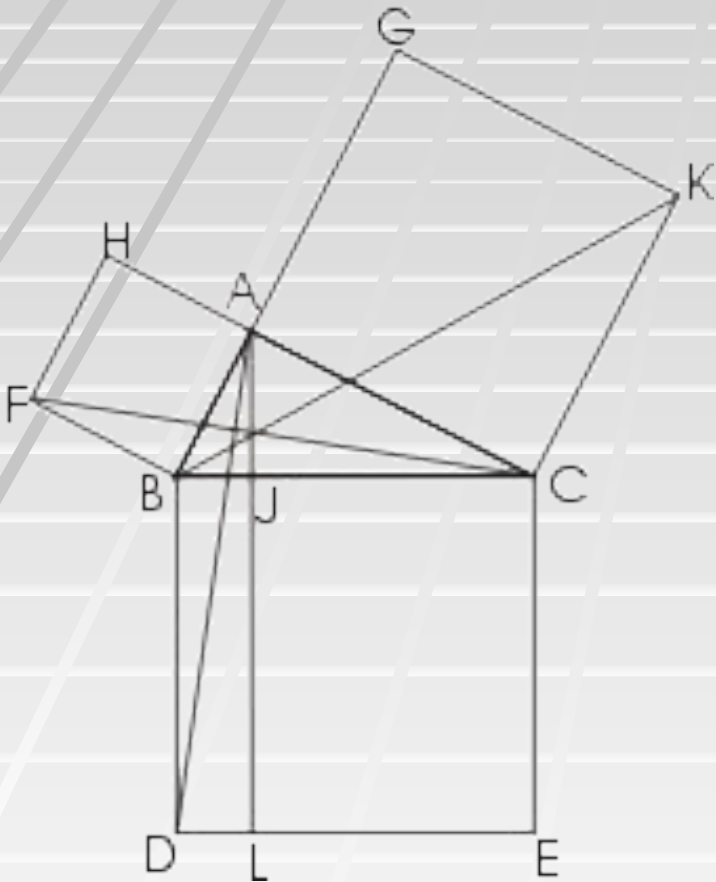
$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ или } c^2 = a^2 + b^2$$

Нами снова доказана теорема Пифагора.

Если треугольник ABC - произвольный, то та же формула дает т. н. **теорему косинусов**, обобщающую теорему Пифагора.



Доказательство Евклида

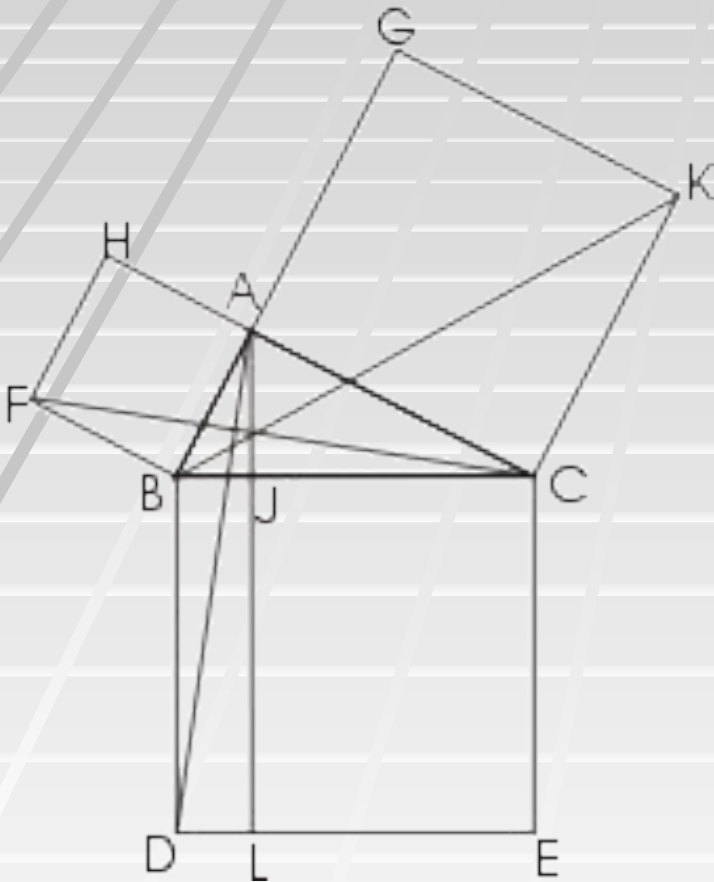


- Это доказательство было приведено **Евклидом** в его "Началах". По свидетельству **Прокла (Византия)**, оно придумано самим Евклидом. Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал".
- На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник ICEL - квадрату ACGK. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе.
- В самом деле, треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними:

Доказательство Евклида

- $FB = AB, BC = BD$

$$PFBC = d + PABC = PABD$$



Но

$$SABD = 1/2 S BJLD,$$

так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD.

Аналогично

$$SFBC = 1/2 S ABFH$$

(BF-общее основание, AB-общая высота). Отсюда, учитывая, что

$$SABD = SFBC,$$

имеем

$$SBJLD = SABFH.$$

Аналогично, используя равенство треугольников BCK и ACE, доказывается, что

$$SJCEL = SACKG.$$

Итак,

$$SABFH + SACKG = SBJLD + SJCEL = SBCED,$$

что и требовалось доказать.

Удивительный факт



- Вопрос о том, можно ли с помощью световых сигналов объясняться с этими гипотетическими существами, вызвал оживленную дискуссию. Парижской академией наук была даже установлена премия в 100000 франков тому, кто первый установит связь с каким-нибудь обитателем другого небесного тела; эта премия все еще ждет счастлиливца. В шутку, хотя и не совсем безосновательно, было решено **передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора.**

Неизвестно, как это сделать; но для всех очевидно, что математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал.

Итоги работы

- На самом деле существует много способов доказательства теоремы Пифагора: доказательство Евклида, Хоукинса, Вальдхейма, способ «луночками» Гиппократата, доказательство Басхары, Эпштейна, Нильсена, Бетхера, Перигалю, Гутхейля, векторное доказательство и многие другие...