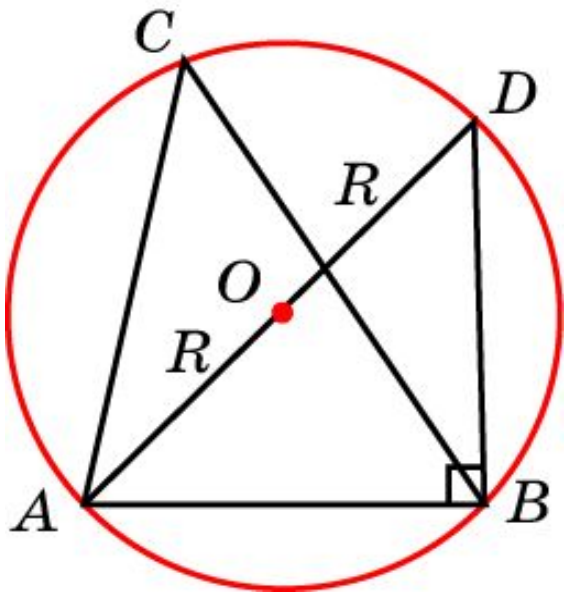
Теорема синусов

Теорема. (Теорема синусов.) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Причем отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около треугольника окружности, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R.$



Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность с центром O и радиусом R. В треугольнике ABD, сторона AD которого проходит через O, углы C и D опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны. $\angle ABD = 90^\circ$. Таким образом, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AB}{\sin D} = AD = 2R.$

Аналогично имеют место и другие требуемые равенства.

pptcloud.r
u

Упражнение 1

В треугольнике даны две стороны $a = 3$, $b = 3\sqrt{2}$, противолежащий стороне a угол A равен 30°. Найдите угол B, лежащий против стороны b.

Ответ: Угол B равен 45° или 135°.

Упражнение 2

Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите отношения синусов углов этого треугольника.

Ответ: 2 : 3 : 4.

Упражнение 3

Синусы углов треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите отношение сторон этого треугольника. Какой это треугольник?

Ответ: 3 : 4 : 5, прямоугольный.

Упражнение 4

Найдите отношения сторон $AC : BC$ и $AB : BC$ в треугольнике ABC, в котором: а) $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 30^\circ$; б) $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$.

Ответ: а) $\sqrt{3} : 3$, $\sqrt{3} : 3$; б) $1 : 2$ и $\sqrt{3} : 2$.

Упражнение 5

Углы треугольника относятся как 1 : 2 : 3. Найдите отношение сторон.

Ответ: $1 : \sqrt{3} : 2$.

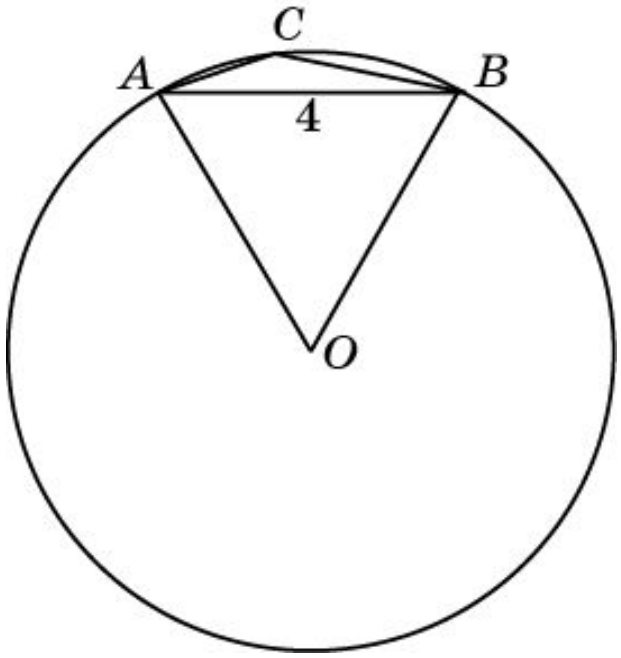
Упражнение 6

В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 120^\circ$. Найдите сторону BC.

Ответ: $2\sqrt{6}$ см.

Упражнение 7

В треугольнике ABC сторона AB равна 4 см, угол C равен 150°. Найдите радиус описанной окружности.



Решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда угол AOB равен 60°. Следовательно, треугольник AOB – равносторонний. Радиус описанной окружности равен 4.

Ответ. 4.

Упражнение 8

Сторона AB треугольника ABC равна 10 см. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если противолежащий этой стороне угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°.

Ответ: а) 10 см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см;

г) 5 см; д) 10 см.

Упражнение 9

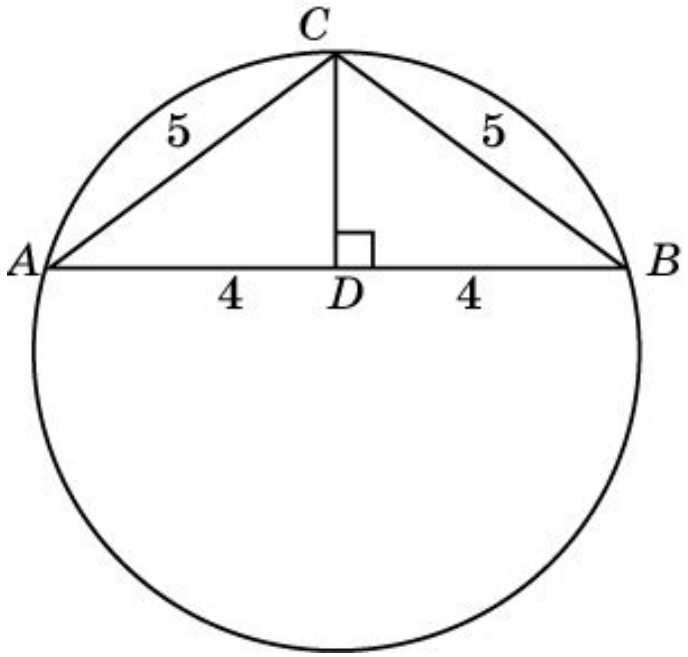
Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 3 см. Найдите сторону AB этого треугольника, если противолежащий ей угол C равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 150°?

Ответ: а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{3}$ см; г) 6 см;

д) 3 см.

Упражнение 10

Стороны треугольника равны 5, 5, 8. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



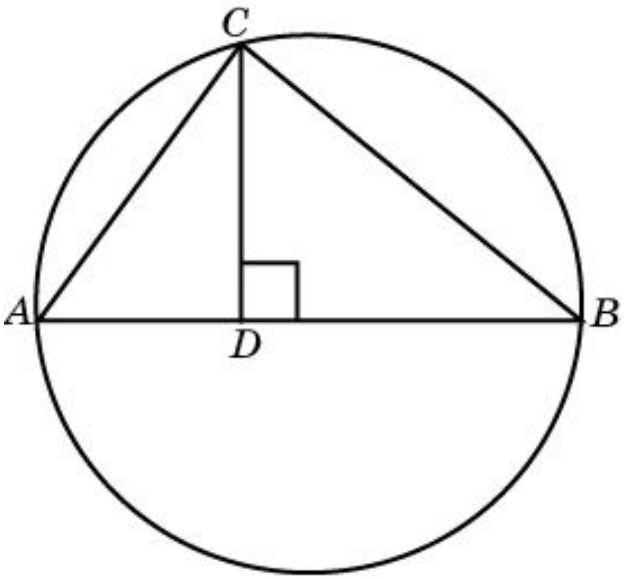
Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $AB = 8$. Тогда высота CD равна 3, $\sin A = 0{,}6$.

Для радиуса R описанной окружности имеем: $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = 4\dfrac{1}{6}$.

Ответ. $4\dfrac{1}{6}$.

Упражнение 11

Две стороны треугольника равны 5 и 6. Высота, опущенная на его третью сторону, равна 4. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



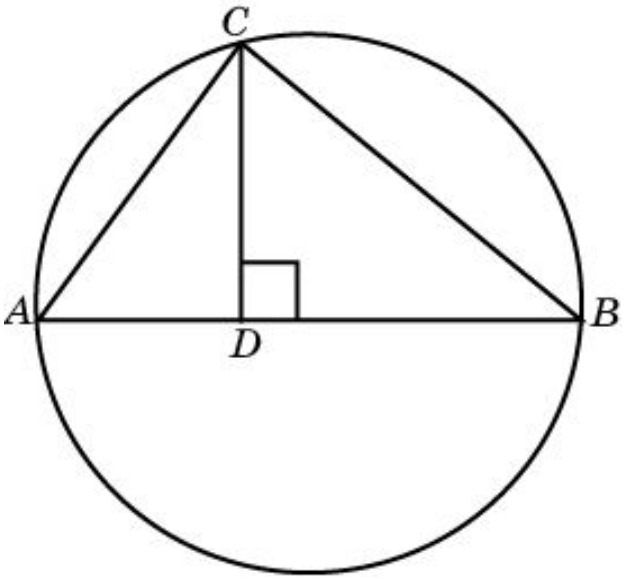
Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC = 5$, $BC = 6$, высота CD равна 4. Тогда $\sin A = 0{,}8$. Для радиуса R описанной окружности имеем: $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = 3\dfrac{3}{4}$.

Ответ. $3\dfrac{3}{4}$.

Упражнение 12

Две стороны треугольника равны 4 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту, опущенную на третью сторону этого треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 6$, радиус R описанной окружности равен 5. Тогда $\sin A = 0{,}6$ и высота CD равна 2,4.



Ответ. 2,4.

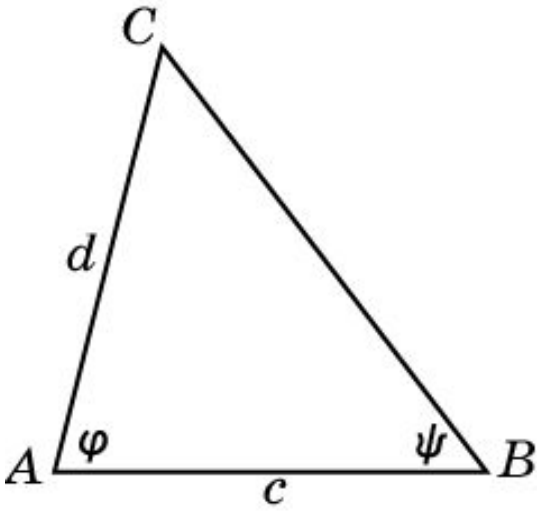
Упражнение 13

Спортивный самолет летит по замкнутому треугольному маршруту с постоянной скоростью. Два угла этого треугольника равны по 30^o. Большую сторону он пролетел за 1 ч. За сколько времени он пролетит весь маршрут?

Ответ: $\frac{3+2\sqrt{3}}{3} \approx 2$ ч 5 мин.

Упражнение 14

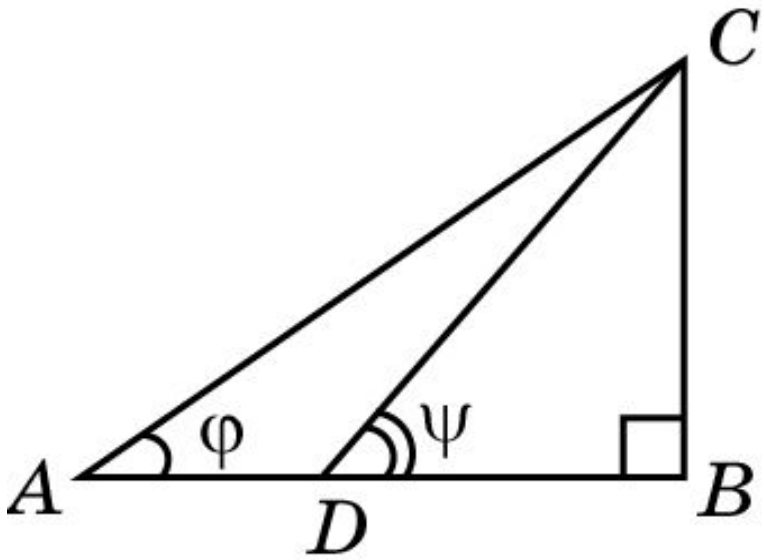
Используя рисунок, укажите способ нахождения расстояния d от точки A до недоступного объекта C.



Ответ: $d = \dfrac{c \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)}$.

Упражнение 15

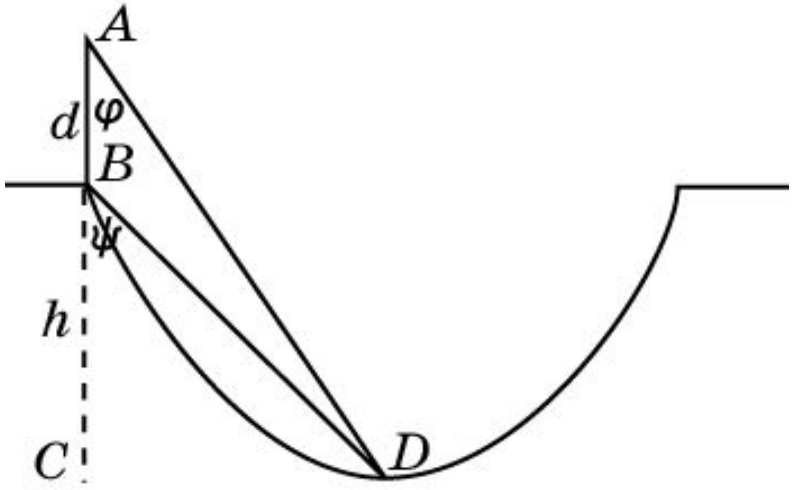
Используя рисунок, укажите способ нахождения высоты BC недоступного объекта.



Ответ: $BC = \dfrac{AD \sin\varphi \cdot \sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)}$.

Упражнение 16

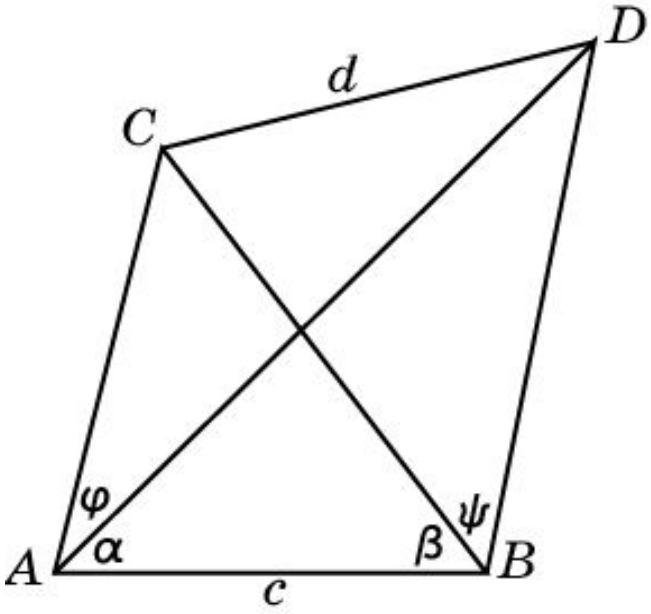
Используя рисунок, укажите способ нахождения глубины h оврага.



Ответ: $h = \dfrac{a \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi}{\sin(\psi - \varphi)}.$

Упражнение 17

Используя рисунок, укажите способ нахождения расстояния d между двумя недоступными объектами C и D.



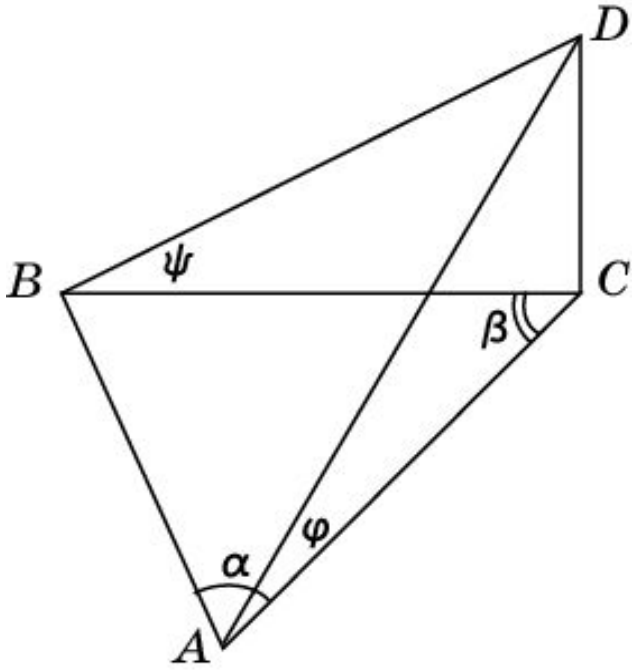
Ответ: $$AC = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\varphi)}.$$

$$AD = \frac{AB \cdot \sin(\beta+\psi)}{\sin(\alpha+\beta+\psi)}.$$

$$d^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos\varphi.$$

Упражнение 18

Используя рисунок, укажите способ нахождения угла, под которым видна башня CD из недоступного пункта B.



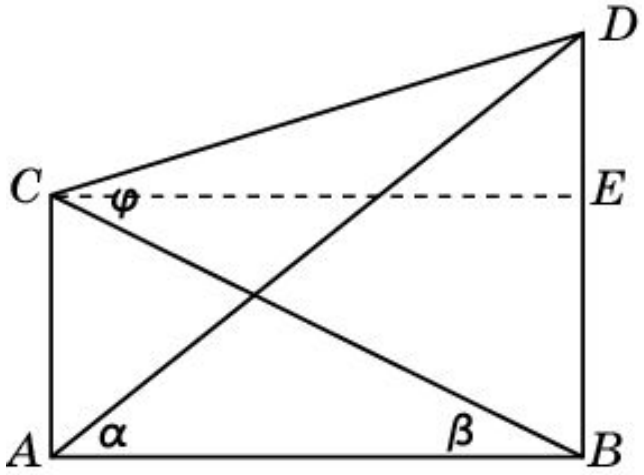
Ответ: $CD = AC \cdot tg\,\varphi.$

$$BC = \frac{AC \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$tg\,\psi = \frac{tg\,\varphi \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

Упражнение 19

Используя рисунок, укажите способ нахождения угла, под которым видна башня BD из вершины C башни AC.



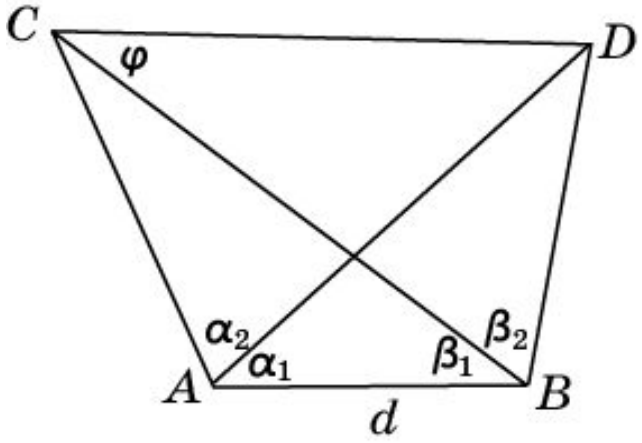
Ответ: $BD = AB \cdot tg\,\alpha.$

$AC = AB \cdot tg\,\beta.$

$\varphi = \beta + arctg(tg\,\alpha - tg\,\beta).$

Упражнение 20

Используя рисунок, укажите способ нахождения угла, под которым виден участок дороги BD из недоступного пункта C.



Ответ: $$BD = \frac{AB \cdot \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta_2)}.$$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1)}.$$

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot \cos\beta_2.$$

Искомый угол теперь находится с помощью теоремы синусов, или теоремы косинусов.