

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha .$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha .$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Теорема синусов и теорема косинусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha . \text{ Учитель Деменская С.А. } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Цель урока

- Экскурс в историю
- Сформулировать и доказать теорему синусов
- Сформулировать и доказать теорему косинусов
- Научиться применять данные теоремы к решению задач

Немного из истории



В 10 в. багдадский ученый Мухаммед из Буджана, известный под именем Абу-ль-Вефа сформулировал теорему синусов. Насир-эд-Дин из Туса (1201-1274) систематически рассмотрел все случаи решения косоугольных сферических треугольников и указал ряд новых способов решения. В 12 в. был переведен с арабского на латынь ряд астрономических работ, что позволило ознакомиться с ними европейцам. Но, к сожалению, многое осталось непереуведенным, и выдающийся немецкий астроном и математик Иоганн Мюллер (1436 -1476), которого современники знали под именем Региомонтана (именно так переводится на латынь название его родного города Кенигсберга), через 200 лет после Насир-эд-Дина заново открыл его теоремы.



ФРАНСУА ВИЕТ (1540 – 1603)

Виет встал у истоков создания новой науки - тригонометрии. Многие тригонометрические формулы впервые были записаны Виетом.

В 1593 году он первым сформулировал в словесной форме теорему косинусов.

Косинус – это сокращение латинского выражения *completelysinus*, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”; $\text{cosa} = \sin(90^\circ - a)$).



Современные обозначения синуса и косинуса знаками $\sin x$ и $\cos x$ были впервые введены в 1739 году И. Бернулли в письме к петербургскому математику Л. Эйлеру. Придя к выводу, что эти обозначения весьма удобны, он стал употреблять их в своих математических работах. Кроме того, Эйлер вводит следующие сокращенные обозначения тригонометрических функций угла x : $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cot} x$, $\operatorname{sec} x$, $\operatorname{cosec} x$.



СФОРМУЛИРУЙТЕ ТЕОРЕМУ О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

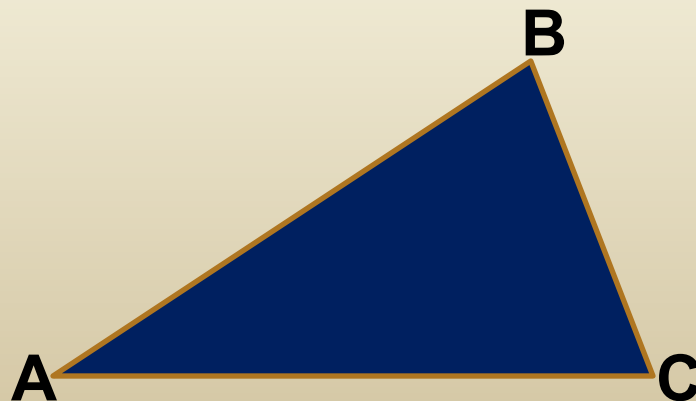
- Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Запишите, чему равна площадь треугольника **ABC**

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin C = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$$

$$AB \sin B = AC \sin C$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$



ТЕОРЕМА СИНУСОВ

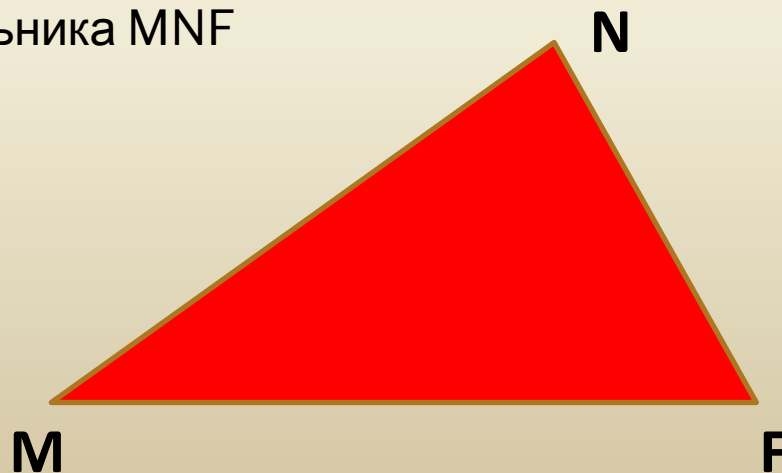
- Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

Запишите теорему синусов для треугольника MNF

$$\frac{MN}{\sin F} = \frac{NF}{\sin M} = \frac{MF}{\sin N}$$



ЗАПИШИТЕ ТЕОРЕМУ СИНУСОВ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ:

□ ABC $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$

□ KLM $\frac{KL}{\sin M} = \frac{KM}{\sin L} = \frac{LM}{\sin K}$

□ PQH $\frac{PQ}{\sin H} = \frac{PH}{\sin Q} = \frac{QH}{\sin P}$

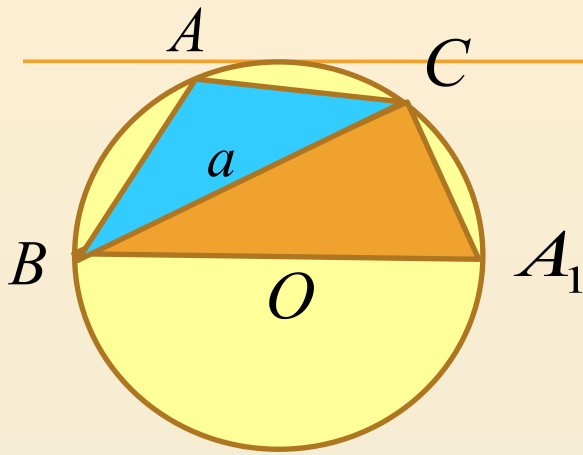


Замеча

ние

Отношение стороны
треугольника к синусу
противолежащего
угла равно диаметру
описанной окружности.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R = D$$



Дано:

R – радиус описанной окружности, $BC =$

BA_1 a , – диаметр

Доказать:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \quad (BC = 2R \sin A)$$

Доказательство:

Проведем диаметр BA_1 . Рассмотрим $\triangle A_1BC$, $\angle C$ – прямоугольный \Rightarrow

$BC = BA_1 \times \sin A_1$. Если т. A_1 лежит на дуге BAC , то $\angle A_1 = \angle A$, если на дуге

BDC , \angle

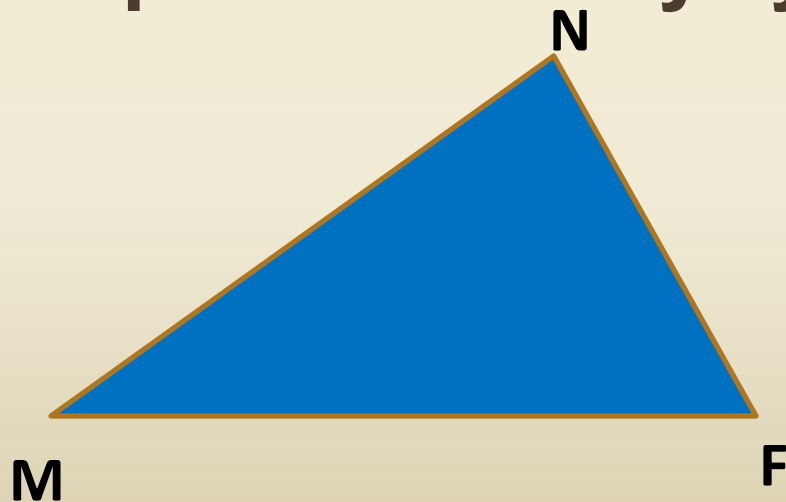
то $A_1 = 180^\circ - A$.

И в том, и в другом случае $\sin A_1 = \sin A \Rightarrow BC = BA_1 \times \sin A$, $BC = 2R \sin A$ или

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



$$MN^2 = MF^2 + FN^2 - 2MF \cdot FN \cos \angle F$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Дано:

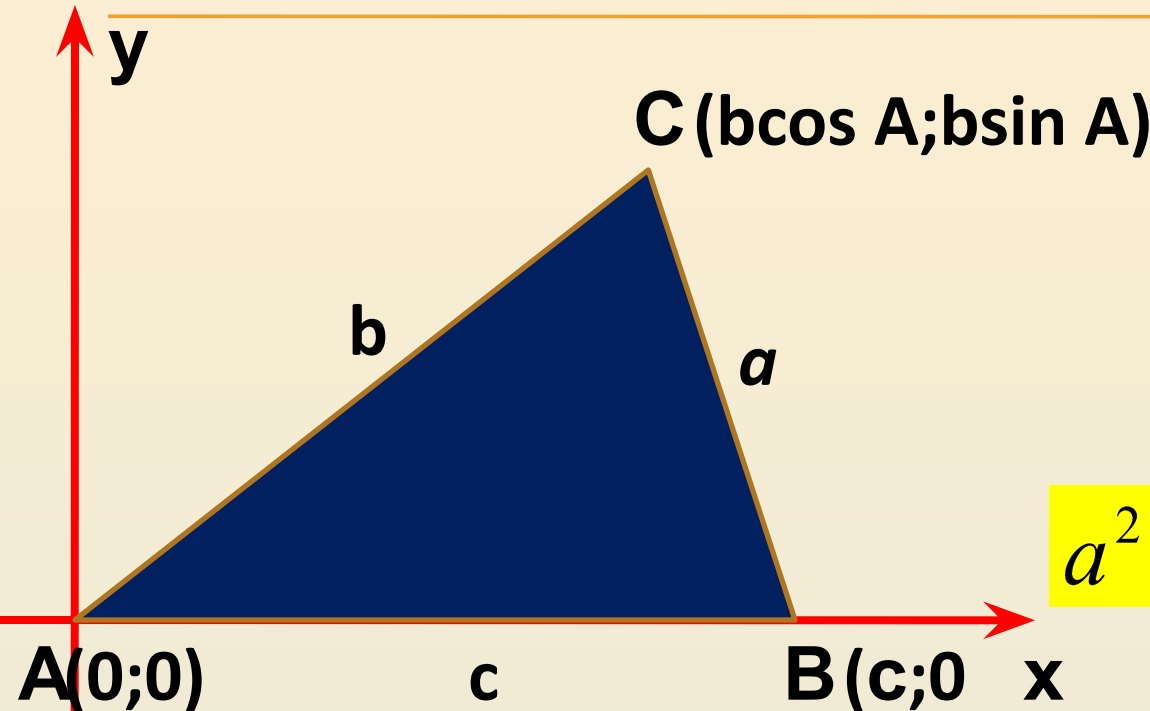
$\triangle ABC$

$AB=c$

$AC=b$

$BC=a$

Доказать:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\begin{aligned} BC^2 = a^2 &= (b \cos A - c)^2 + b^2 \sin^2 A = \\ &= b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A - 2bc \cos A + c^2 = \\ &= b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2 = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \end{aligned}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ЗАПИШИТЕ ТЕОРЕМУ КОСИНУСОВ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ:

□ ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle C$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle A$$

□ KLP $LK^2 = LM^2 + MK^2 - 2LM \cdot MK \cos \angle M$

$$LM^2 = LK^2 + KM^2 - 2LK \cdot KM \cos \angle K$$

$$MK^2 = ML^2 + LK^2 - 2ML \cdot LK \cos \angle L$$



ВЫРАЗИМ КОСИНУС УГЛА ИЗ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle C$$

$$2AC \cdot BC \cos \angle C = AC^2 + BC^2 - AB^2$$

$$\cos \angle C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle A$$

Выразит $\cos \angle B, \cos \angle A$
e



Обобщенная теорема

Пифагора.

Теорему косинусов называют иногда обобщенной теоремой Пифагора. Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. В самом деле, если в $\triangle ABC$ угол A прямой, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ и по теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

т.е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катета.

Задача № 1025

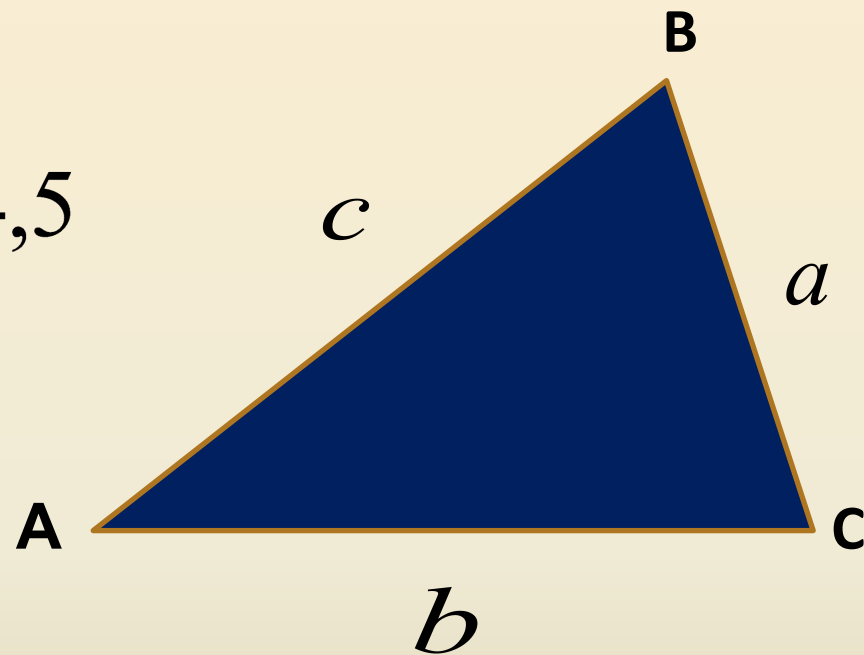
(6)

Дано

$$\angle A = 30^\circ, \angle C = 75^\circ, b = 4,5$$

Найти

$$\angle B, a, c$$



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

- ▣ П.97-98
- ▣ П.99 законспектировать в тетрадь задачи с 1 по 3
- ▣ Выполнить №1025(а,ж,з)



**Спасибо за
урок**

